

考虑表面效应的纳米圆形薄板振动

赵德敏, 龚宇龙

(中国石油大学储运与建筑工程学院, 山东青岛 266580)

摘要:基于 Gurtin 的表面弹性理论考虑表面弹性和残余表面应力, 建立周边固支的轴对称纳米圆板的振动微分方程。研究残余表面应力对纳米板振动频率和主振型的影响。结果表明:前四阶固有频率分别随着残余表面应力参数的增大而减小;但残余表面应力对一阶固有频率和主振型影响最大,随着振动阶数的增大,残余表面应力对固有频率和主振型的影响逐渐减小;同时对于一阶固有频率,板的厚度越薄或者板的半径越大,受残余表面应力的影响越大。

关键词:纳米圆板振动; 表面弹性; 残余表面应力; 固有频率; 主振型

中图分类号:O 326 **文献标志码:**A

引用格式:赵德敏, 龚宇龙. 考虑表面效应的纳米圆形薄板振动[J]. 中国石油大学学报(自然科学版), 2017, 41(5): 153-158.

ZHAO Demin, GONG Yulong. Surface effects on vibration of circular thin nano-plate[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2017, 41(5):153-158.

Surface effects on vibration of circular thin nano-plate

ZHAO Demin, GONG Yulong

(College of Pipeline and Civil Engineering in China University of Petroleum, Qingdao 266580, China)

Abstract: Based upon Gurtin's theory of surface elasticity, the surface elasticity and residual surface stress are both considered, and the vibration model of a thin axi-symmetric plate at nano-scale with clamped boundary condition is developed. The influences of the residual surface stress effect on the first four order natural frequencies and vibration modes were presented. The results reveal that the first order natural frequency decreases with the increase of the residual surface stress parameter. Moreover, the residual surface stress effect exerts more important effect on the first natural frequency than others, and with the vibration order increases, the effect becomes weaker. The first four order vibration modes for various surface effect parameters are also given in the paper, and the impact on the vibration mode is similar to that on the natural frequencies. The influence of the residual surface stress is greater on the first main mode than other modes.

Keywords: vibration of circular nano-plate; surface elasticity; residual surface stress; natural frequency; main vibration mode

考虑表面效应设计微/纳机电系统(MEMS/NEMS)、原子力显微镜(AFM)和基于纳米机械振子的光学质谱仪等已成为当前科学研究的热点。以石墨烯纳米薄膜为代表的纳米板/膜等纳米弹性结构,作为一种高灵敏度、高频率器件广泛应用于这些系统的传感器和共振器中^[1-5]。对于纳米材料的力学问题研究,主要有 Gurtin 等^[6]提出的表面弹性理论、Eringen 等^[7]提出的非局部弹性理论和 Aifan-

tis^[8]的应变梯度弹性理论等。基于这些理论的纳米梁的振动问题已取得丰富的研究成果^[9-12]。纳米板属于二维几何结构,其动力学问题研究更为复杂。徐巍等^[13]研究了四边简支的石墨烯矩形中厚度板的振动,得到非局部参数和各阶频率之间的关系。Ilkhani 等^[14]基于非局部弹性理论,由波传播法研究了石墨烯膜的自由振动的固有频率。Xu 等^[15]研究了 Kirchhoff 和 Mindlin 两种矩形板的弯曲和振动问

收稿日期:2017-03-02

基金项目:国家自然科学基金项目(11672334)

作者简介:赵德敏(1973-),女,讲师,博士,研究方向为纳米弹性结构非线性动力学。E-mail:zhaodemin@upc.edu.cn。

题。Wang 等^[16]基于表面弹性理论研究了矩形 Kirchhoff 和 Mindlin 两类板的振动问题,得到了表面残余应力和板的振动周期、振动速度的幅值之间的关系。实际工程中有许多板为圆形板^[17], Sahmani 等^[18-19]研究了考虑表面效应的圆板后屈曲构型附近的自由振动及圆板在电场中的“吸合”电压等振动的不稳定性问题^[19]。但这些文献中采用高阶剪切变形板理论,考虑了板厚度方向的切应变;而实际工程中,许多纳米传感器及谐振器都是薄板,无须考虑沿厚度方向的切应变。国内外文献中尚未报道不考虑表面效应的圆形纳米薄板的动力学问题研究。笔者建立纳米圆板振动的动力学模型,并研究表面效应参数对振动固有频率的影响。

1 Gurtin 表面弹性理论

Gurtin 等提出的弹性理论中认为固体表面是一层厚度为零的薄膜,其材料属性与底层块体不同,因而具有不同的本构关系。对于底层块体,假设满足广义胡克定律,对于表面层,建议采用的应力应变关系张量^[6]为

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}^s = \tau^s \delta_{\alpha\beta} + (\tau^s + \lambda^s) \varepsilon_{\alpha\beta} + 2(\mu^s - \tau^s) \varepsilon_{\alpha\beta} + \tau^s u_{\alpha,\beta}^s, \\ \sigma_{\alpha 3}^s = \tau^s u_{3,\alpha}^s, \end{cases} \quad (1)$$

其中

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, \alpha = \beta; \\ 0, \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

式中, λ^s 和 μ^s 为表面层的拉梅常数; τ^s 为无应变条件下的表面残余应力; $(\alpha, \beta) = 1, 2$; $\delta_{\alpha\beta}$ 为 Kronecker delta 符号。

Young-Laplace 方程原本描述的是两层静态液体接触面上下的压力差, Gurtin 等在推导表面弹性理论时,将其使用范围扩展到固体领域。认为表面层和底层固体材料的接触面是一层无厚度的几何表面,由于表面张力或薄膜张力现象,使得接触面的上下两侧存在压力差,并且压力差与接触面的几何形状有关。Young-Laplace 方程表明,压力差 Δp 与两个相互垂直方向上的曲率之和存在线性比例关系, $\Delta p = \gamma \nabla^2 w$, 其中, $\nabla^2 w$ 为曲面的曲率, γ 表示残余表面应力或残余薄膜应力。

2 周边固定轴对称纳米圆板振动微分方程

图 1 所示纳米圆板的半径和厚度分别为 R 和 h 。在板的中面中心上建立柱坐标系 (r, θ, z) , 其中 r 和 θ 分别沿着径向和周向, z 沿着厚度方向竖直向

下, $z = \pm h/2$ 。根据 Gurtin 表面弹性理论,依据材料属性将厚度为纳米级的板划分为 3 部分,即上、下表面和内部的固体材料。上、下表面具有表面材料参数 μ^s, λ^s 和 τ^s , 固体内部材料的弹性模量、泊松比和材料密度分别为 E, ν 和 ρ 。假设当板产生弯曲变形时,表面材料与内部固体材料之间无相对滑动。根据小变形假设,沿 z 向位移 w 不随厚度变化。

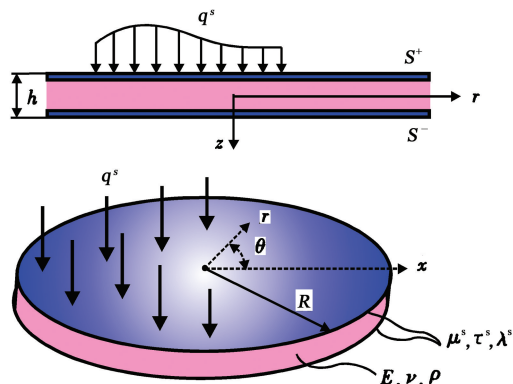


图 1 纳米圆板示意图

Fig. 1 Sketch of circular micro/nano-plate

变形后表面层的形状即为薄板的挠曲面,因此变形后轴对称圆板的曲率 $\nabla^2 w$ 可表示为

$$\nabla^2 w = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}. \quad (2)$$

上、下表面层和内部固体材料之间均存在压力差,例如,在上表面上存在压力差,依据 Young-Laplace 方程,可得到上表面上压力差 $q^u = \tau^u \nabla^2 w$ 和下表面上压力差 $q^b = \tau^b \nabla^2 w$, 因此,忽略薄板的重力,实际产生总的横向载荷为

$$q^s = q^u + q^b = (\tau^u + \tau^b) \nabla^2 w. \quad (3)$$

式中, τ^u 和 τ^b 分别表示和上、下表面残余应力相关的参数。

只讨论上、下残余表面应力相等的情况,即 $\tau^u = \tau^b = \tau_0$, 并对横向载荷进行修正后得到

$$q^s = 2\tau_0 \nabla^2 w. \quad (4)$$

由式(2)~(4)可以得到整个薄板的应变能 U 为

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}) dV + \frac{1}{2} \left(\int_{S^+} \tau_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} dS + \int_{S^-} \tau_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} dS \right). \quad (5)$$

外力功 W 为

$$W = \int_S q^s w dS. \quad (6)$$

同时,纳米板的总动能 T 为

$$T = \frac{1}{2} \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \rho \dot{w}^2 dz dS. \quad (7)$$

基于 Hamilton 原理,

$$\delta \int_{t_0}^{t_f} L dt = 0,$$

其中

$$L = T - U + W.$$

式中, δ 为变分算子; L 为广义的拉格朗日函数。

得到振动微分方程为

$$D' \nabla^4 w + \rho h \ddot{w} - 2\tau_0 \nabla^2 w = 0, \quad (8)$$

其中

$$D' = D_1 + \frac{1}{2}(\lambda^s + 2\mu^s)h^2, D_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

式中, D_1 为经典的弹性力学参数; D' 为考虑表面弹性的参数。

对于周边固支的轴对称圆板,其边界条件可以表示为

$$\begin{cases} r=0, w(0,t) \neq \infty, \\ r=R, w(R,t)=0, \frac{\partial w(R,t)}{\partial r}=0. \end{cases} \quad (9)$$

方程(7)的解可表示为

$$w(r,t) = Z(r)e^{i\omega t}. \quad (10)$$

式中, ω 为振动固有频率。

将方程(10)代入方程(8)中,可得到两个常微分方程分别为

$$\frac{d^2 Z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dZ}{dr} + k_1^2 Z = 0, \quad (11)$$

$$\frac{d^2 Z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dZ}{dr} - k_2^2 Z = 0. \quad (12)$$

其中

$$k_1^2 = \frac{\sqrt{\tau_0^2 + D' \rho h f^2} - \tau_0}{D'}, k_2^2 = \frac{\sqrt{\tau_0^2 + D' \rho h f^2} + \tau_0}{D'}.$$

方程(11)和(12)分别为 0 阶和 0 阶修正的贝塞尔方程,其解分别为

$$\begin{cases} Z_1(r) = C_1 J_0(k_1 r) + C_2 Y_0(k_1 r), \\ Z_2(r) = C_3 I_0(k_2 r) + C_4 K_0(k_2 r). \end{cases} \quad (13)$$

式中, $C_1 \sim C_4$ 为 4 个积分常数,需要由边界条件确定; J_0 和 Y_0 分别为 0 阶的第一类和第二类贝塞尔函数; I_0 和 K_0 分别为 0 阶的第一类和第二类虚宗量的(修正的)贝塞尔函数。

微分方程(8)的通解为

$$Z(r,t) = [C_1 J_0(k_1 r) + C_2 Y_0(k_1 r) + C_3 I_0(k_2 r) + C_4 K_0(k_2 r)] e^{i\omega t}. \quad (14)$$

将式(14)代入方程(9)得到

$$\frac{dZ(R)}{dr} = 0, Z(R) = 0. \quad (15)$$

将式(15)代入式(13),得到两端固支圆板的振

型函数 $Z(r)$ 为

$$Z(r) = C_1 J_0(k_1 r) + C_3 I_0(k_2 r). \quad (16)$$

整理式(16),得到

$$Z(r) = C_1 \left[J_0(k_1 r) - \frac{J_0(k_1 R)}{I_0(k_2 R)} I_0(k_2 r) \right]. \quad (17)$$

3 数值仿真及其分析

研究表面效应参数对纳米圆板前 4 阶固有频率以及前 4 阶振型的影响规律。分别对不同厚度和不同半径的板进行数值仿真。在没有特殊说明的情况下,数值仿真采用的材料参数^[18]如下: $E = 177.3$ GPa, $\nu = 0.27$, $\rho = 7000$ kg/m³, $\mu^s = 2.5$ N/m, $\lambda^s = -8$ N/m, $R = 6$ μ m 和 $h = 100$ nm。

3.1 残余表面应力对固有频率影响

$f_i(\tau_0)$ ($i=1, \dots, 4$) 分别为第 1 至第 4 阶主振动的固有频率,均为 τ_0 的函数, $f_i(0)$ ($i=1, \dots, 4$) 即为 $\tau_0=0$ 时不考虑残余表面应力板的前 4 阶固有频率。仿真得到 $f_i(0)$ ($i=1, \dots, 4$) 分别为 4.280×10^7 、 16.661×10^7 、 37.329×10^7 和 66.269×10^7 rad/s。取 $P_i = \frac{f_i(\tau_0)}{f_i(0)}$ ($i=1, \dots, 4$), 得到 P_i 和 τ_0 的关系如图 2 所示。

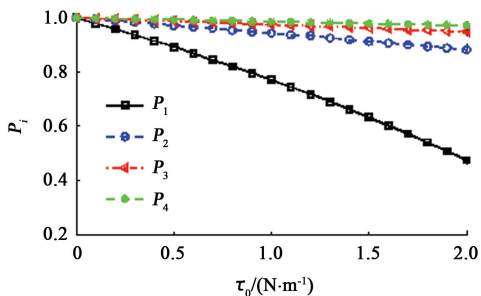


图 2 残余表面应力对前四阶固有频率参数 P_i 的影响

Fig. 2 Effect of residual surface stress on parameter of the first four natural frequency P_i

从图 2 中可以看出, P_i 随着 τ_0 的增大而减小, P_1 下降最多, 依次为 P_2 和 P_3 , P_4 下降最小。此规律表明, 随着残余表面应力增大, 每一阶固有频率均有下降趋势, 但一阶固有频率下降最多, 当 $\tau_0=2$ 时仅为 $\tau_0=0$ 时的 47.3%。随着主振动阶数增大, 固有频率下降幅度减小。对于第 3、4 阶主振动, 当 $\tau_0=2$ 时的固有频率为 $\tau_0=0$ 时的 94.9% 和 97.1%。说明残余表面应力对一阶固有频率的影响较大, 对高阶固有频率的影响较小。这主要因为一阶主振动时, 板的曲率接近于定值或者为正或者为负, 表面残余应力方向为单向且绝对值较大。而板以高阶固有频率振动时, 板的曲率有正有负, 因此在板的表面上

在不同区域存在指向相反的残余应力且绝对值较小。因此表面对一阶固有频率的影响远大于对高阶固有频率的影响。

进一步研究残余表面应力对不同厚度圆板的一阶固有频率影响,如图 3 所示。数值计算表明,当板的厚度 $h=80,100,120$ 和 140 nm 时, $\tau_0=0$ 时的一阶固有频率 $p_1=3.4234\times10^7, 4.2780\times10^7, 5.136\times10^7$ 和 $5.992\times10^7\text{ rad/s}$ 。当 $h=80\text{ nm}$, $\tau_0>1.6$ 时,一阶固有频率不存在,这意味着板越来越“软”,以至于不能发生振动。

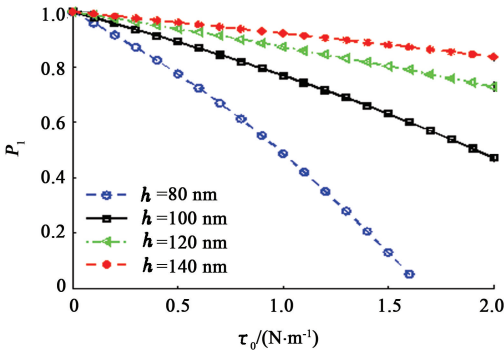
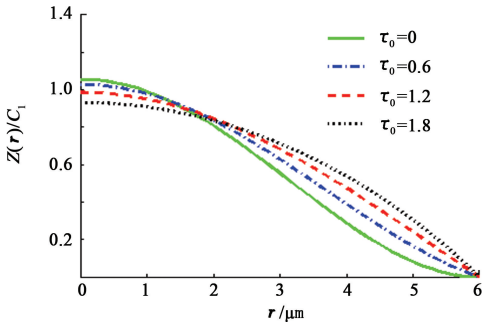


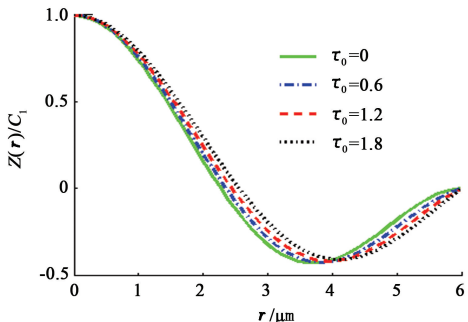
图 3 残余表面应力对不同厚度板的一阶固有频率 P_1 的影响

Fig.3 Effect of residual surface stress on parameter of the first order natural frequency P_1 for plate with various depths

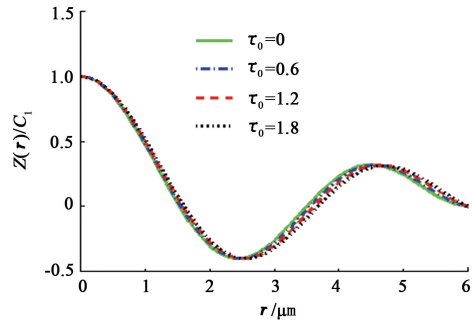
从图 3 中可以看出,随着残余表面应力参数增



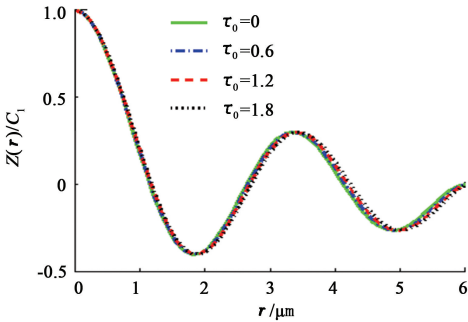
(a) 一阶振型



(b) 二阶振型



(c) 三阶振型



(d) 四阶振型

图 5 不同残余表面应力纳米板的 4 阶主振型

Fig.5 Different vibration modes of circular plate with various residual surface stress

大,所有厚度板的一阶固有频率降低,但是板的厚度越小,表面效应的影响越大。从图 3 可以看出, τ_0 取相同值时,板的厚度越大, P_1 越接近 1,即越接近不考虑表面效应的固有频率。此研究结果与文献 [17] 中结果相一致。

图 4 为当 $h=140\text{ nm}$ 不同半径的板,残余表面应力对一阶固有频率的影响。由图 4 可见,一阶固有频率均随着 τ_0 的增大而减小;但板的半径越大,残余表面应力的影响越大。

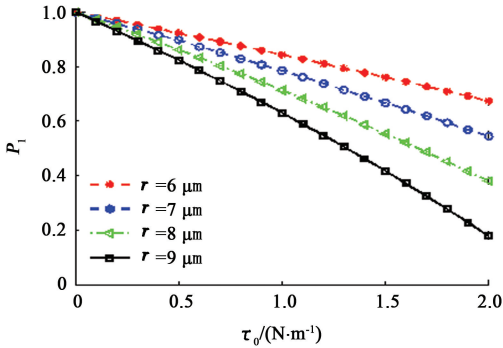


图 4 残余表面应力对不同半径板的一阶固有频率 P_1 的影响

Fig.4 Effect of residual surface stress on parameter of the first order natural frequency for plate with various radius

3.2 残余表面应力对振型函数的影响

图 5 为不同残余表面应力纳米板的 4 阶主振型。

从图5(a)可以看出,在中心 $r=0$ 处,随着残余表面应力 τ_0 增大, $Z(r)/C_1$ 减小。这表明随着表面效应增强, $r=0$ 处的振幅将减小。半径在 $1.33\text{ }\mu\text{m}<r<1.78\text{ }\mu\text{m}$ 内,几条曲线非常接近,即此区间内残余表面应力对振动幅值影响较小。在 $r\approx 4\text{ }\mu\text{m}$ 附近,随着残余表面应力增强,振幅将增大。从图5(b)可以看出,残余表面应力对圆板中心处的影响很小,但在 $1\text{ }\mu\text{m}<r<3\text{ }\mu\text{m}$ 处随着表面残余应力增强,振幅增大;在 $3.82\text{ }\mu\text{m}<r<4.20\text{ }\mu\text{m}$ 内,曲线很接近,振幅几乎相等。在 $4\text{ }\mu\text{m}<r<6\text{ }\mu\text{m}$ 处,随着残余表面应力增强,振幅减小。由图5(c)和5(d)可以看出,几条曲线基本接近,残余表面应力的影响逐渐减弱,说明残余表面应力对高阶主振型的影响较小。造成此结果的原因和其对固有频率影响的原因类似。

4 结 论

(1)随着残余表面应力增大,前4阶固有频率均降低,但残余表面应力对一阶固有频率的影响最大;随着振动阶数增加,残余表面应力对固有频率影响依次减弱。

(2)当板的几何尺寸变化时,板越薄或者半径越大,残余表面应力对固有频率的影响越大。残余表面应力对一阶主振型的影响和固有频率类似,其对一阶主振型的影响最大,随着阶数增加,影响依次减弱。

参考文献:

- [1] WANG Q, ARASH B. A review on applications of carbon nano tubes and graphemes as nano-resonator sensors [J]. Computational Materials Science, 2014,82:350-360.
- [2] CUENOT S, FRETIGNY C, DEMOUSTIER-CHAMPAGNE S, et al. Surface tension effect on the mechanical properties of nano materials measured by atomic force microscopy[J]. Physical Review B, 2004,69:165410.
- [3] KACEM N, BAGUET S, HENTZ S, et al. Computational and quasi-analytical models for non-linear vibrations of resonant in MEMS and NEMS sensors [J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2011,46:532-542.
- [4] 李金金,宾文,朱卡的. 基于纳米机械振子的光学质谱仪[J]. 科学通报,2014,59(20):1907-1911.
LI Jinjin, BIN Wen, ZHU Kadi. Optical mass sensing based on nanomechanical resonator systems [J]. Science China Press, 2014,59(20):1907-1911.
- [5] 封松林,王曦,王跃林,等. 微纳系统材料、制造与器件

物理研究进展[J]. 中国科学基金,2014(2):81-91.

FENG Songlin, WANG Xi, WANG Yuelin, et al. Material, fabrication and device physics on micro-nano systems [J]. China Science Foundation, 2014(2):81-91.

- [6] GURTIN M E, MURDOCH A I. A continuum theory of elastic material surfaces[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1975,57:291-32.
- [7] ERINGEN A C, EDELEN D G B. On nonlocal elasticity [J]. International Journal of Engineering Science, 1972, 10(3):233-248.
- [8] AIFANTIS E C. On the microstructural origin of certain inelastic models [J]. Journal of Engineering Materials and Technology, 1984,106(4):326-330.
- [9] WANG G, FENG X. Effects of surface elasticity and residual surface tension on the natural frequency of microbeams [J]. Applied Physics Letters, 2007, 90: 231904.
- [10] ZHAO D, LIU J, WANG L. Nonlinear free vibration of cantilever nanobeam with surface effects: semi-analytical solutions [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2016,113,184-195.
- [11] HSU J C, LEE H L, CHANG W J. Longitudinal vibration of cracked nanobeams using nonlocal elasticity theory [J]. Current Applied Physics, 2011,11:1384-1388.
- [12] 刘建林,曹高峰. 基于应变梯度理论的纳米悬臂梁大位移分析[J]. 中国石油大学学报(自然科学版), 2016,40(1):116-120.
LIU Jianlin, CAO Gaofeng. Large deflection analysis of a nanoscaled cantilever beam with strain gradient effects [J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2016,40(1):116-120.
- [13] 徐巍,王立峰,蒋经农. 基于应变梯度中厚板单元的石墨烯振动研究[J]. 力学学报,2015,47(5):751-760.
XU Wei, WANG Lifeng, JIANG Jingnong. Finite element analysis of strain gradient middle thick plate made on the vibration of graphene sheets[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2015,47(5):751-760.
- [14] ILKHANI M R, BAHRAMI A, HOSSEINI HASHEMI S H. Free vibrations of thin rectangular nano-plates using wave propagation approach [J]. Applied Mathematical Modelling, 2016,40:1287-1299.
- [15] XU X J, DENG Z C, MENG J M, et al. Bending and vibration analysis of generalized gradient elastic plates [J]. Acta Mech, 2014,225:3463-3482.

- [16] WANG K F, WANG B L. Effects of residual surface stress and surface elasticity on the nonlinear free vibration of nanoscale plates[J]. Journal of Applied Physics, 2012,112;013520.
- [17] ANSARI R, GHOLAMI R, FAGHIH S M, et al. Surface stress effect on the vibrational response of circular nanoplates with various edge supports[J]. Journal Applied Mechanics, 2013,80;021021.
- [18] SAHMANI S, BAHRAMI M, ANSARI R. Surface effects on the free vibration behavior of post buckled circular higher-order shear deformable nanoplates including geometrical nonlinearity[J]. Acta Astronautica,2014,105;417-427.
- [19] SAHMANI S, BAHRAMI M. Nonlocal plate model for dynamic pull-in instability analysis of circular higher-order shear deformable nanoplates including surface stress effect[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2015,29(3):1151-1161.
- (编辑 沈玉英)