

# 岩石断裂力学的扩展有限元法

周博, 孙博, 薛世峰

(中国石油大学储运与建筑工程学院, 山东青岛 266580)

**摘要:**针对岩石材料的断裂力学问题阐述扩展有限元法的单元位移模式的选择、确定平面裂纹空间位置的水平集法和特殊单元的数值积分方法。介绍最大周向应力裂纹扩展判据和计算应力强度因子的相互作用积分法,进而建立岩石断裂力学的扩展有限元法。建立 I 型裂纹和 II 型裂纹的岩石断裂力学的扩展有限元计算模型,对 I 型裂纹的应力强度因子和 II 型裂纹的裂纹扩展路径进行扩展有限元法数值模拟计算。结果表明,建立的岩石断裂力学扩展有限元法可对岩石材料的断裂力学参数和裂纹扩展路径进行数值模拟分析,验证了数值计算结果的合理性,能有效地描述岩石断裂力学特性。

**关键词:**扩展有限元法;水平集法;应力强度因子;相互作用积分法;裂纹扩展判据;裂纹扩展路径

**中图分类号:**O 346.1 **文献标志码:**A

**引用格式:**周博,孙博,薛世峰.岩石断裂力学的扩展有限元法[J].中国石油大学学报(自然科学版),2016,40(4):121-126.

ZHOU Bo, SUN Bo, XUE Shifeng. Extended finite element method for fracture mechanics of rock[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2016, 40(4): 121-126.

## Extended finite element method for fracture mechanics of rock

ZHOU Bo, SUN Bo, XUE Shifeng

(College of Pipeline and Civil Engineering in China University of Petroleum, Qingdao 266580, China)

**Abstract:** An extended finite element method (XFEM) was used to study the mechanical characteristics and crack propagation behaviors of rock materials, in which the methods for selecting the element displacement mode, the geometric description of plane cracks and the integration of special elements were introduced. The criteria for crack propagation in terms of the maximum hoop stress and an interaction integration method for calculating the stress intensity factor were introduced to formulate the fundamentals of the XFEM model in fracture mechanics of rocks. Then the XFEM model was developed to predict the mechanical behaviors of fractures in rocks, and the model was solved numerically using the MATLAB software. The stress intensity factors of the crack type I and the crack propagation paths of the crack type II were calculated and analyzed using the XFEM model, respectively. The calculation results show that the proposed XFEM method is viable to effectively simulate the crack propagation process and to calculate the fracture mechanics parameters in rock materials.

**Keywords:** extended finite element method; level set method; stress intensity factor; interaction integral method; crack propagation criteria; crack propagation path

石油开采、城市地铁、穿山隧道、水力水电等工程项目的建设都不可避免地涉及岩石区域。岩石的变形及破坏规律等力学性质对工程勘察、建设施工及运行安全性和可靠性等方面有重要影响。岩石破坏过程是其内部裂纹的萌生、扩展、直至贯通的结

果。研究含裂纹岩石材料的力学性质,计算其断裂力学参数、预测其裂纹扩展规律,具有工程实际意义。解析方法只能解决少数简单的断裂力学问题,在实际应用中数值方法是研究断裂力学问题常用的重要而有效途径。有限元法<sup>[1]</sup>通过在裂纹尖端设

置奇异单元,较好地描述了裂纹尖端位移、应变等物理场的奇异性,但是在模拟裂纹扩展时须重新划分网格,这极大地降低了计算效率。基于有限元法的黏聚力模型通过设置界面单元<sup>[2]</sup>,可有效地实现对裂纹扩展的模拟,但需要预先得到裂纹的扩展路径,不适合模拟复杂裂纹的扩展问题。边界元法<sup>[3]</sup>能有效地处理裂纹等奇异性问题,且比有限元法精确和高效,但对非线性问题缺少高效计算方案,这限制了其应用范围。无网格法<sup>[4-6]</sup>的近似函数不依赖于网格,减少了因网格畸变带来的困难,可以高精度地模拟高速碰撞、动态裂纹扩展等问题,但无网格法对非线性问题的模拟,仍有待进一步开发。以 Belytschko 为代表的研究组<sup>[7-9]</sup>,在有限元法的框架内建立了扩展有限元法(XFEM),很好地解决了由于材料或几何等因素引起的不连续问题,特别适合于处理断裂力学问题,近年来在众多领域的不连续问题的求解中不断得到成功应用<sup>[10-15]</sup>。笔者针对岩石材料的断裂力学问题,阐述 XFEM 的单元位移模式的选择、描述和追踪裂纹空间位置的水平集法及特殊单元的数值积分方法建立岩石平面裂纹问题的 XFEM 计算模型。利用 MATLAB 编写计算岩石断裂力学特性的 XFEM 程序,计算 I 型裂纹的应力强度因子,模拟 II 型裂纹的裂纹扩展路径。

# 1 XFEM 基本原理

## 1.1 单元位移模式

XFEM 的核心思想是在传统有限元法的单元位移模式中引入扩充项,以更精确地反映不连续性对单元位移及其他单元变量的影响。在 XFEM 中单元位移模式表示为

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^n N_i(x,y)u_i + \psi(x,y) \quad (1)$$

式中, $x,y$ 为空间坐标; $u$ 为单元位移分量; $N_i$ 为单元形函数; $u_i$ 为单元结点位移分量; $n$ 为单元结点总数; $\psi$ 为反映不连续性的扩充项。

基于单位分解的思想和便于程序设计的考虑,扩充项  $\psi$  可表示为

$$\psi(x,y) = \sum_{i=1}^n [N_i(x,y) \sum_{j=1}^m \varphi_j(x,y)q_j] \quad (2)$$

式中, $\varphi_j(x,y)$ 为反映不连续性的增强函数; $q_j$ 为结点位移分量  $u_i$  的附加自由度; $m$ 为附加自由度的总数。

不同类型的非连续问题只须选取不同的增强函数  $\varphi_j(x,y)$  即可,其他处理过程完全相同,可见 XFEM 继承了传统有限元法的格式统一和便于编程的优点。

对于平面裂纹问题有两种特殊单元,一种是如图 1 所示的裂纹贯穿单元,另一种是如图 2 所示的包含裂纹尖端单元。对于如图 1 所示的裂纹贯穿单元,式(2)中的  $m$  等于 1,增强函数取为

$$\varphi_1(x,y) = H(x,y) = \begin{cases} +1, & (x,y) \in A^+; \\ -1, & (x,y) \in A^- \end{cases} \quad (3)$$

对于如图 2 所示的包含裂纹尖端单元,式(2)中的  $m$  等于 4,增强函数取为

$$[\varphi_j(x,y) |_{j=1,2,3,4}] = \left[ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] \quad (4)$$

式中, $r$ 和 $\theta$ 为图 2 所示的裂纹尖端局部极坐标。

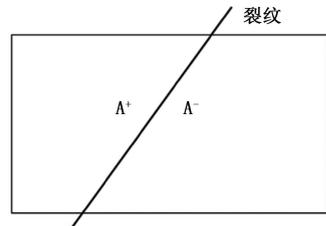


图 1 裂纹贯穿的单元

Fig. 1 Element penetrated by crack

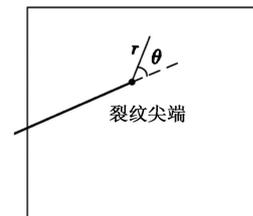


图 2 包含裂纹尖端的单元

Fig. 2 Element containing crack tip

## 1.2 水平集法

和传统有限元法不同的是,在 XFEM 中网格的划分和间断面位置相互独立,间断面可以穿过单元。在 XFEM 中须对间断面进行几何描述,以方便识别单元和结点的类型。水平集法<sup>[16]</sup>是确定和追踪裂纹界面移动的数值方法,该方法用比裂纹界面维数高一维的水平集函数描述裂纹界面,裂纹界面的演化过程可表示为零水平集函数的变化过程。利用水平集法追踪界面演化的主要优点是,在描述界面运动时有限元网格不变,不必重新划分有限元网格就可以追踪界面运动。

常用的水平集函数是符号距离函数。对于图 3 所示的平面裂纹水平集函数,可用符号距离函数表示为

$$f[(x,y),t] = \pm \min \| (x,y) - (x,y)_r \|_t, \quad (5)$$

$$g[(x,y),t] = \pm \min \| (x,y) - (x,y)_r \|_r. \quad (6)$$

式中,  $(x, y)$  为平面内任意一点的坐标;  $(x, y)_r$  为裂纹上任意一点的坐标;  $(x, y)_r$  为过裂纹尖端虚线上任意一点的坐标;  $t$  为时间;  $f[(x, y), t]$  在裂纹上部取正号、在裂纹下部取负号;  $g[(x, y), t]$  在虚线左侧取正号、在虚线右侧取负号。

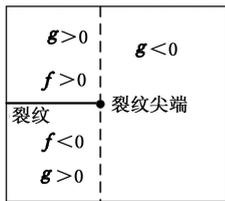


图 3 描述平面裂纹的水平集函数

Fig. 3 Level set functions describing plane crack

### 1.3 特殊单元积分

在 XFEM 中为了反映间断面引起的不连续性, 在包含间断面的特殊单元中引入描述不连续性的增强函数, 致使这些单元的位移模式不再是光滑多项式函数, 若对这些特殊单元仍采用传统有限元的高斯积分方案, 将会引起较大的积分误差。

在 XFEM 的实际计算中, 对这些特殊单元通常采用两种积分方法。第一种方法是采用子域积分法<sup>[10]</sup>, 即沿着间断面将单元分成若干个小区域, 在每个小区域按传统有限元法的高斯积分方案积分, 然后将所有小区域内的积分相加得到整个单元的积分。第二种积分方法<sup>[16]</sup>是在这些特殊单元内普遍加密高斯积分点, 如对图 4 中裂纹贯穿单元和包含裂纹尖端单元均采用 64 个高斯积分点。第二种方法比第一种方法在程序设计中容易实现, 因此本文采用第二种积分方法。

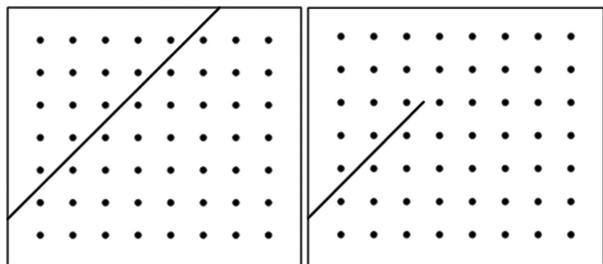


图 4 特殊单元的积分方法

Fig. 4 Integral method for special elements

## 2 岩石断裂力学

岩石属于典型的脆性材料, 可以用线弹性断裂力学理论描述其断裂力学特性。和 XFEM 密切相关的岩石断裂力学特性包括裂纹尖端位移分量求解、裂纹扩展的条件及应力强度因子计算等。

### 2.1 裂纹尖端位移场

根据线弹性断裂力学, 含 I - II 复合型裂纹的无限大板在裂纹尖端附近的水平位移分量  $u_x$  和竖直位移分量  $u_y$  分别描述为

$$u_x = \frac{K_I h_1(r, \theta) + K_{II} h_2(r, \theta)}{\sqrt{8\pi G}} \quad (7)$$

$$u_y = \frac{K_I h_3(r, \theta) + K_{II} h_4(r, \theta)}{\sqrt{8\pi G}} \quad (8)$$

其中

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

式中,  $K_I$  和  $K_{II}$  分别为 I 型裂纹和 II 型裂纹的应力强度因子;  $G$  为剪切弹性模量;  $E$  和  $\nu$  分别为弹性模量和泊松比。

在式(7)中的  $h_1(r, \theta)$  和  $h_2(r, \theta)$  分别描述为

$$\begin{cases} h_1(r, \theta) = (\kappa - 1)\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} + \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \\ h_2(r, \theta) = (\kappa + 1)\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} + \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}. \end{cases} \quad (9)$$

式中,  $r$  和  $\theta$  为裂纹尖端局部极坐标。

在式(8)中的  $h_3(r, \theta)$  和  $h_4(r, \theta)$  分别描述为

$$\begin{cases} h_3(r, \theta) = (\kappa + 1)\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} - \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, \\ h_4(r, \theta) = (\kappa - 1)\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} - \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}. \end{cases} \quad (10)$$

在式(9)中的  $\kappa$  是一个与泊松比有关的系数, 对于平面应力问题和平面应变问题的取值情况为

$$\kappa = \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu), & \text{平面应力;} \\ 3-4\nu, & \text{平面应变.} \end{cases} \quad (11)$$

对比式(4)和式(9)可以发现, 包含裂纹尖端单元的 4 个增强函数是线弹性断裂力学裂纹尖端位移场解析解中的 4 个函数项。可见含裂纹尖端单元的 4 个增强函数反映了裂纹尖端位移场的解析特性, 可以有效地描述裂纹尖端引起的不连续性。

### 2.2 最大周向应力理论

对于 I - II 型复合平面裂纹, 裂纹尖端局部极坐标系下的环向拉应力分量可描述为

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_\theta \quad (12)$$

其中

$$K_\theta = \frac{1}{2} K_I (1 + \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}$$

根据最大周向应力理论, 裂纹的扩展方向和扩展条件为: 裂纹扩展方向与最大周向拉应力方向垂直, 即  $K_\theta$  最大值的方向; 当  $K_\theta$  最大值达到极值时裂

纹开始扩展。

将  $K_\theta$  带入极大值条件

$$\frac{\partial K_\theta}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial^2 K_\theta}{\partial \theta^2} < 0, \tag{13}$$

得到平面复合裂纹的扩展方向角  $\theta_0$  的计算式为

$$\begin{cases} K_I \sin \theta_0 - K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) = 0, \\ K_I (1 - 3 \cos \theta_0) \cos \frac{\theta_0}{2} + K_{II} (9 \cos \theta_0 + 5) \sin \frac{\theta_0}{2} < 0. \end{cases} \tag{14}$$

平面复合裂纹的扩展准则为

$$K_{\theta_{max}} = K_I \cos^3 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0 \cos \frac{\theta_0}{2} = K_c. \tag{15}$$

式中,  $K_c$  为材料断裂韧性, 可通过实验测定。

### 2.3 相互作用积分法

计算应力强度因子的常用数值方法包括: 结点位移外推法、单元应力外推法、相互作用积分法等。相互作用积分法具有很高的数值精度, 在程序设计中容易实现, 因此采用相互作用积分法计算应力强度因子。

相互作用积分是一个图 5 所示的在包含裂纹尖端的回路  $\Gamma$  上的能量积分, 为了便于数值计算可将回路积分转换为图 5 所示的积分区域为  $A$  的面积分<sup>[17]</sup>, 即

$$I = - \int_A [\sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^a \delta_{lj} - \sigma_{ij} u_{i,1}^a - \sigma_{ij}^a u_{i,1}] q_{,j} dA. \tag{16}$$

式中,  $u_i^a$ 、 $\varepsilon_{ij}^a$ 、 $\sigma_{ij}^a$  分别为附加位移场、附加应变场、附加应力场;  $q$  为权函数, 在区域  $A$  内的结点上取值为 1, 在区域  $A$  外的结点上取值为 0, 在单元内任意一点的值为  $q = \sum_{i=1}^4 N_i q_i$ 。

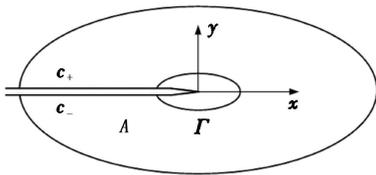


图 5 相互作用积分法的积分区域

Fig.5 Integral region for interaction integration method

应力强度因子  $K$  与相互作用积分  $I$  间的关系为

$$K = \frac{E'}{2} I. \tag{17}$$

$E'$  对于平面应力问题和平面应变问题的取值情况为

$$E' = \begin{cases} E, & \text{平面应力;} \\ E/(1-\nu^2), & \text{平面应变.} \end{cases} \tag{18}$$

在计算 I 型裂纹的应力强度因子  $K_I$  时, 式 (16) 中的  $u_i^a$ 、 $\varepsilon_{ij}^a$ 、 $\sigma_{ij}^a$  分别取为纯 I 型裂纹的位移场、应变场、应力场。在计算 II 型裂纹的应力强度因子  $K_{II}$  时, 式 (16) 中的  $u_i^a$ 、 $\varepsilon_{ij}^a$ 、 $\sigma_{ij}^a$  分别取为纯 II 型裂纹的位移场、应变场、应力场。

## 3 数值算例

基于 XFEM 基本原理和岩石断裂力学, 利用 MATLAB 编写描述岩石断裂力学特性的 XFEM 计算程序, 对 I 型裂纹的应力强度因子和 II 型裂纹的裂纹扩展路径进行数值模拟计算。

### 3.1 应力强度因子计算

如图 6 所示边长  $W=2\text{ m}$  的正方形, 左部居中有一个长度为  $a$  的水平裂纹, 作用在上下两边的拉伸载荷  $\sigma$  为  $1.0 \times 10^6\text{ Pa}$ , 材料的弹性模量  $E$  为  $15 \times 10^9\text{ Pa}$ 、泊松比  $\nu$  为 0.25、断裂韧性  $K_c$  为  $8.22 \times 10^6\text{ N/m}^{1.5}$ 。

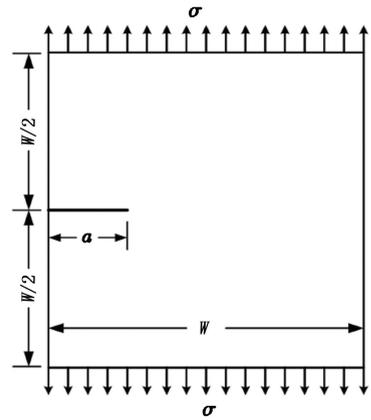


图 6 含 I 型裂纹的几何实体

Fig.6 Geometrical model with crack of mode I

图 7 为图 6 所示的 I 型裂纹几何实体中裂纹长度  $a=0.45\text{ m}$  的 XFEM 计算模型, 单元类型为平面应变

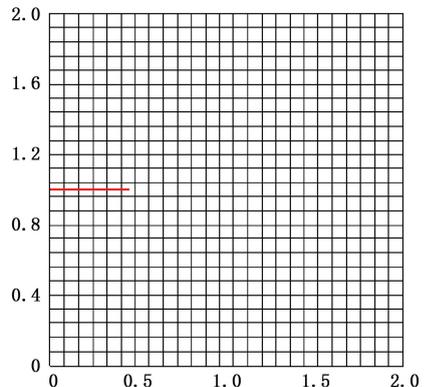


图 7 XFEM 计算模型

Fig.7 Numerical calculating model based on XFEM

四边形平面等参元,单元总数为 676 个,水平和垂直方向的单元均为 26。表 1 为同裂纹长度  $a$  取不同值时的 XFEM 数值计算结果、解析解和相对误差,其中裂纹长度不同时单元类型和网格密度与图 7 所示的单元类型和网格密度完全相同,解析解按照公式<sup>[18]</sup>

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left[ 1.12 - 0.234 \left( \frac{a}{W} \right) + 10.55 \left( \frac{a}{W} \right)^2 - 21.72 \left( \frac{a}{W} \right)^3 + 30.39 \left( \frac{a}{W} \right)^4 \right] \quad (19)$$

计算得到。

从表 1 的数值计算结果可以看出,XFEM 计算应力强度因子有较高的数值计算精度。

表 1 应力强度因子  $K_I$  的计算结果

Table 1 Calculating results of stress intensity factor  $K_I$

裂纹长/ m	XFEM 解/ ( $10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1.5}$ )	解析解/ ( $10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1.5}$ )	相对误 差/%
0.15	0.7783	0.7919	1.72
0.25	1.0938	1.0817	1.12
0.35	1.4024	1.3781	1.76
0.45	1.7436	1.7026	2.41
0.55	2.1349	2.0711	3.08
0.65	2.5875	2.5032	3.37

### 3.2 裂纹扩展路径模拟

在计算模拟 II 型裂纹的裂纹扩展路径时,所取的 XFEM 计算模型中的网格密度、单元类型、裂纹位置与长度及材料参数与图 7 所示的 XFEM 计算模型的完全相同。为模拟 II 型裂纹的裂纹扩展路径,设定的边界条件为:下侧边水平位移  $u_x$  为  $-6.4 \text{ mm}$ 、上侧边水平位移  $u_x$  为  $6.4 \text{ mm}$ ,上、下两边竖直位移  $u_y$  均为 0。

图 8 为由 XFEM 计算得到的 II 型裂纹的裂纹扩展路径,其中红色粗实线为初始裂纹的位置、红色粗

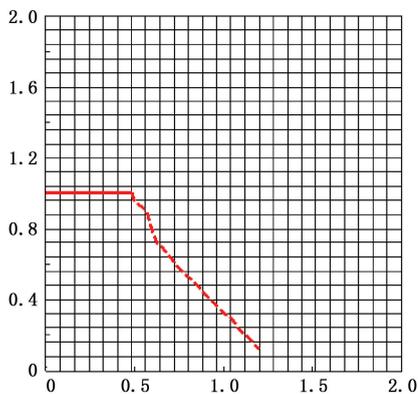


图 8 由 XFEM 计算的 II 型裂纹的裂纹扩展路径

Fig. 8 Crack propagation path of mode II calculated by XFEM

虚线为裂纹的扩展路径。根据最大周向应力理论,即式(14)可知,II型裂纹扩展的方向角  $\theta_0 = -70.5^\circ$ ,图 9 所示的裂纹扩展方向与最大周向应力理论确定的裂纹扩展方向基本相同,可见 XFEM 能有效地预测裂纹的扩展路径。

图 9 为 II 型裂纹扩展后的 XFEM 网格图,其中的结点位移被放大 15 倍,可以发现其变形规律和所设定的边界条件完全符合,数值计算结果是合理的,这也表明 XFEM 能有效地预测平面裂纹的扩展路径。

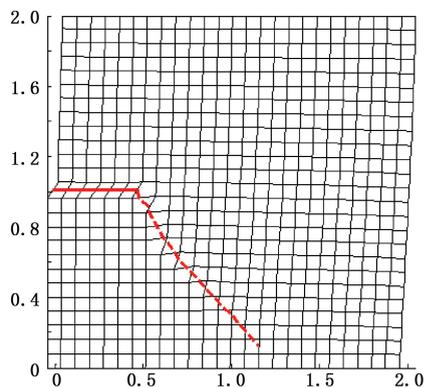


图 9 II 型裂纹扩展后的 XFEM 网格图  
Fig. 9 XFEM mesh figure after crack extension of mode II propagating

## 4 结束语

阐述了单元位移模式选择、描述裂纹几何的水平集法及特殊单元的数值积分方法,建立了描述岩石断裂力学特性的扩展有限元法。建立的岩石断裂力学扩展有限元法可对岩石材料的断裂力学参数和裂纹扩展路径进行数值模拟计算,能有效地描述岩石断裂力学特性。XFEM 计算模型验证了数值计算结果的合理性,可有效地预测平面裂纹的扩展路径。

### 参考文献:

[1] 李录贤,王铁军. 扩展有限元法(XFEM)及其应用[J]. 力学进展, 2005,35(1):5-20.  
LI Luxian, WANG Tiejun. The extended finite element method and its applications—a review [J]. Advances in Mechanics, 2005,35(1):5-20.

[2] 王承强,郑长良. 裂纹扩展过程中线性内聚力模型计算的半解析有限元法[J]. 计算力学学报,2006,23(2):164-151.  
WANG Chengqiang, ZHENG Changliang. Semi-analytical finite element method for linear cohesive force model in crack propagation [J]. Chinese Journal of Computa-

- tional Mechanics, 2006,23(2):164-151.
- [3] 孙玉周,王锦燕,许君风. 边界元法在断裂力学数值计算中的应用研究[J]. 中原工学院学报,2004,15(5):21-23.  
SUN Yuzhou, WANG Jinyan, XU Junfeng. Boundary element method for the plane elastic problem with cracks [J]. Journal of Zhongyuan Institute of Technology, 2004,15(5):21-23.
- [4] 张雄,宋康祖,陆明万. 无网格法研究进展及其应用[J]. 计算力学学报,2003,20(6):730-742.  
ZHANG Xiong, SONG Kangzu, LU Mingwan. Research progress and application of meshless method [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2003,20(6):730-742.
- [5] 孙翔,刘传奇,薛世峰. 有限元与离散元混合法在裂纹扩展中的应用[J]. 中国石油大学学报(自然科学版),2013,37(3):126-130.  
SUN Xiang, LIU Chuanqi, XUE Shifeng. Application of combined finite-discrete element method for crack propagation [J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2013,37(3):126-130.
- [6] 顾元通,丁桦. 无网格法及其最新进展[J]. 力学进展,2005,35(3):323-337.  
GU Yuantong, DING Hua. Recent developments of meshless method [J]. Advances in Mechanics, 2005,35(3):323-337.
- [7] BELYTSCHKO T, BLACK T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing [J]. International Journal for Numerical Method in Engineering, 1999,45(5):601-620.
- [8] MOES N, DOLBOW J, BELYTSCHKO T. A finite element method for crack growth without remeshing [J]. International Journal for Numerical Method in Engineering, 1999,46(1):131-150.
- [9] MOSE N, BELYTSCHKO T. Extended finite element method for cohesive crack growth [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2002,69(7):813-833.
- [10] 余天堂. 含裂纹体的数值模拟[J]. 岩石力学与工程学报,2005,24:4432-4439.  
YU Tiangtang. Numerical simulation of a body with cracks [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005,24:4432-4439.
- [11] 方修君,金峰,王进廷. 基于扩展有限元法的粘聚裂纹模型[J]. 清华大学学报(自然科学版),2007,47(3):344-347.  
FANG Xiujun, JIN Feng, WANG Jinting. Cohesive crack model based on extended finite element method [J]. Journal of Tsinghua University (Science & Technology), 2007,47(3):344-347.
- [12] 董玉文,余天堂,任青文. 直接计算应力强度因子的扩展有限元法[J]. 计算力学学报,2008,25(1):72-77.  
DONG Yuwen, YU Tiantang, REN Qingwen. Extended finite element method for direct evaluation of strength intensity factors [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2008,25(1):72-77.
- [13] 宋娜,周储伟. 扩展有限元裂尖场精度研究[J]. 计算力学学报,2009,26(4):544-547.  
SONG Na, ZHOU Chuwei. Accuracy study of crack tip field in extended finite element method [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2009,26(4):544-547.
- [14] 茹忠亮,朱传锐,张友良,等. 裂纹问题的扩展有限元法研究[J]. 岩土力学,2011,32(7):2171-2176.  
RU Zhongliang, ZHU Chuanyue, ZHANG Youliang, et al. Study of fracture problem with extended finite element method [J]. Rock and Soil Mechanics, 2011,32(7):2171-2176.
- [15] 师访,高峰,杨玉贵. 正交各向异性岩体裂纹扩展的扩展有限元法研究[J]. 岩土力学,2014,35(4):1203-1210.  
SHI Fang, GAO Feng, YANG Yugui. Application of extended finite element method to study propagation problems of orthotropic rock mass [J]. Rock and Soil Mechanics, 2014,35(4):1203-1210.
- [16] 庄茁,柳占立,成斌斌,等. 扩展有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社,2012:35-46.
- [17] 解德,钱勤,李长安. 断裂力学中的数值计算方法及工程应用[M]. 北京:科学出版社,2009.
- [18] ZHOU B, WANG D X, XUE S F. Calculation on crack parameter by extended finite element method [J]. Applied Mechanics and Materials, 2015(716/717):751-754.

(编辑 沈玉英)