

小波奇异值分解的瞬变弱信号检测

徐彦凯, 双 凯

(中国石油大学地球物理与信息工程学院, 北京 102249)

摘要:研究小波阈值法和奇异值分解法,分析最大分解层数、阈值函数、小波基函数的选取以及窗长和保留奇异值个数等参数的选择,并在此基础上提出小波与奇异值分解相结合降噪检测信号的方法。该方法首先将信号作小波分解,再对小波分解系数作奇异值分解,最后通过阈值法保留小波系数并重建降噪信号,利用重建信号进行信号检测。结果表明:该方法能更好地区分信号和噪声,获得更好的降噪和检测结果。

关键词:小波阈值法; 奇异值分解; 瞬变信号; 信号检测

中图分类号:TN 911.7 **文献标志码:**A

Detection of transient weak signal based on wavelet transform and singular value decomposition

XU Yan-kai, SHUANG Kai

(College of Geophysics and Information Engineering in China University of Petroleum, Beijing 102249, China)

Abstract: The wavelet-threshold method and the singular value decomposition (SVD) were introduced for detection of transient weak signal. Detailed aspects in the methods were discussed, including how to select the maximum decomposition level, threshold function, wavelet basis function, window length and the effective singular value number. A new detecting method integrating the wavelet method and the singular value decomposition was put forward. In the method, the transient weak signal is decomposed by db2 wavelet, and then the wavelet coefficients which are de-noised by singular value decomposition are used to reconstruct the signal. Simulation results demonstrate that the proposed method is efficient in distinguishing the transient weak signal from noise. By comparison, the proposed method outperforms the wavelet-threshold method and SVD.

Key words: wavelet-threshold method; singular value decomposition; transient signal; signal detection

在油气井下电磁脉冲数据传输中,有效信号具有暂态瞬变的特征。由于传输距离远,接收到的微弱有用信号往往被环境噪声所淹没。因此,有效检测瞬变弱信号是电磁脉冲数据传输的关键技术。小波分析是近些年发展起来的一种新的时频分析方法,小波变换能使信号能量集中在一些大的小波系数中;而噪声能量却分布于整个小波域内,对应的小波系数小。因此,小波阈值法可以较好地用于抑制噪声并检测信号。考虑到加噪信号对应矩阵的奇异值分解一定程度上可以反映矩阵的主要特征,实现噪声去除和信号提取,笔者将小波及奇异值分解相

结合,实现微弱瞬变信号的检测。

1 小波变换及降噪应用

1.1 小波变换理论

设 $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$, 若 $\psi(t)$ 为母小波,其傅里叶变换 $\Psi(\omega)$ 满足条件:

$$C_\psi = \int_{\mathbf{R}} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \quad (1)$$

将 $\psi(t)$ 进行伸缩和平移,得到小波基函数

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), a > 0, b \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

其中 a 为尺度(伸缩)因子, b 为平移因子。

信号 $f(t)$ 的连续小波变换定义^[1] 为

$$WT_f(a,b) = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt. \quad (3)$$

对 a, b 进行二进离散化, 即 $a = 2^j, b = 2^k, j, k \in \mathbf{Z}$, 得到的二进小波变换为

$$WT_f(j,k) = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* (2^{-j}t - k) dt.$$

其逆变换为

$$f(t) = C \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} WT_f(j,k) \cdot \tilde{\psi}(2^{-j}t - k). \quad (4)$$

Mallat 算法实现了二进小波的快速分解与重构^[2], 分解公式为

$$\begin{cases} c_{j,k} = \sum_n c_{j-1,n} h_{n-2k}, \\ d_{j,k} = \sum_n c_{j-1,n} g_{n-2k}. \end{cases} \quad (5)$$

重构公式为

$$c_{j-1,n} = \sum_k c_{j,k} \tilde{h}_{n-2k} + \sum_k d_{j,k} \tilde{g}_{n-2k}. \quad (6)$$

式中, $c_{j,k}$ 为尺度系数; $d_{j,k}$ 为小波系数; $h, g, \tilde{h}, \tilde{g}$ 分别为低通和高通分解与重建滤波器; j 为分解层数。

1.2 小波阈值法降噪检测技术

由于小波变换能使信号的能量集中在一些大的小波系数中, 而噪声能量却平均分布于整个小波域内, 对应的小波系数小。应用信号与噪声小波系数的特点对信号降噪, 降噪步骤^[3] 如下:

(1) 确定小波基函数和小波分解最大层数, 应用式(5) 对信号进行 J 层小波分解得到小波系数和尺度系数。

(2) 确定每层小波系数的阈值, 根据每层阈值按阈值函数形式对小波系数进行处理, 把保留下来的作为降噪后信号的小波系数。

(3) 利用式(6) 对信号进行重构, 并对降噪后信号检测。

上述步骤中, 分解尺度、阈值函数和小波基函数的合理选择对信号检测至关重要。

2^j 尺度下小波伪频率 f_{2^j} 与小波中心频率 f_c 的关系^[3]:

$$f_{2^j} = f_c / (a \Delta t). \quad (7)$$

式中, Δt 为采样周期。

若信号的中心频率接近小波的伪频率, 则会使此频率段的小波系数达到最大, 从而有效地检测信号。研究的瞬变信号的频率集中在 $(0.3 \sim 1.1) \times 10^5$ Hz, db2 小波的中心频率为 0.6667 Hz, 采样周期

为 1×10^{-6} s, 由式(7) 可知, $j = 3$ 和 4 的 db2 小波伪频率在信号的频率范围, 所以确定小波分解最大层数为 4。

常用的方法有硬阈值函数和软阈值函数, 采用软阈值处理会对所有的小波系数都进行抑制, 可使降噪后信号比较平滑, 但对于提取具有突变特性的瞬变信号而言, 对降噪后信号的平滑性没有要求, 相反采用硬阈值方法能够更好地保留原信号的一些瞬变特征以便信号检测, 所以采用硬阈值处理方法更为合适。

选择小波基函数时考虑正交小波变换后的数据不会出现冗余, 并保证信号精确重构。因此选择几种有代表性的常用正交小波基: haar 小波、coif1 小波、sym2 小波和 db2 小波, 在此基础上进一步通过仿真试验对比选优。

1.3 仿真与分析

四种小波基下的重建信号见图 1。

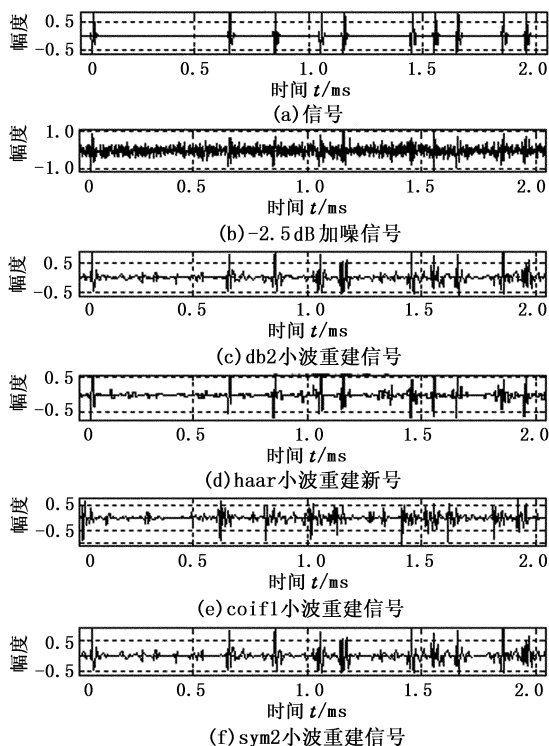


图1 四种小波基下的重建信号

Fig.1 Reconstructed waveforms by four wavelet functions

电磁脉冲传输的数字信号用图 1(a) 中的瞬变信号表示, 该信号是一个持续时间短的暂态过程。通过电路分析, 得到该信号的数学模型为

$$s(t) = \begin{cases} A(1 - e^{-\alpha t}) \cos(\omega t), & t \leq t_0, \\ Ae^{-\alpha(t-t_0)} \cos(\omega t), & t > t_0. \end{cases} \quad (8)$$

式中, A 为信号幅度; ω 为振荡频率; α 为衰减因子, 决定信号暂态过程的持续时间, 其持续时间由电路参数决定; $t \leq t_0$ 为充电时间; $t > t_0$ 为放电时间。 $\alpha = 15$, $\omega = 4.7 \times 10^5 \text{ rad/s}$ 。

井下电磁脉冲信号传输中, 噪声源主要有两大类: 井下钻井环境产生的噪声和电子器件产生的电子噪声。 钻井噪声频率范围为 $1 \sim 4 \text{ kHz}$ 。 电子噪声在频域和时域上分布一致, 是一种高斯白噪声^[4]。 由于钻井噪声可通过滤波的方法去噪, 在此只考虑无法直接滤除的白噪声。

针对小波基的选取进行试验, 试验中采用如图1(b)所示的 -2.5 dB 加噪信号, 统一的4尺度分解, 得到图1所示的4种小波基下的重构信号。 比较图1中的(c)、(d)、(e)、(f), 可以直观地看出, 针对本文研究的瞬变信号, db2小波的降噪效果最佳, sym2次之, coif1小波最差, 因此选择db2小波基。

由图1(b)信号作4尺度db2小波分解的各尺度系数如图2所示。 从图2看出, 无法从 $j=1, 2$ 的小波系数中区分信号和噪声, 因此重构时将 $j=1, 2$ 的小波系数全置零, 保留 $j=3, 4$ 中大于阈值 $\lambda = \sigma \sqrt{2 \log N}$ 的小波系数。

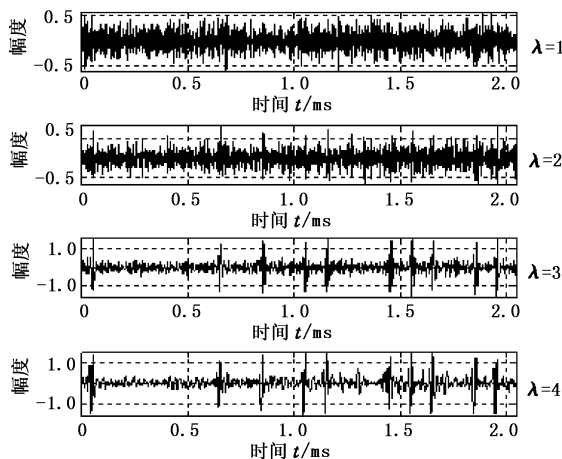


图2 db2小波分解各尺度系数

Fig.2 Scale coefficients with db2 wavelet

图1(c)表明, 在高信噪比的情况下, 小波阈值法可以实现信号的检测, 但从图3所示的 -8.5 dB 加噪信号的db2小波重建信号可以看出: 在 $(0.1 \sim 0.2) \text{ ms}$ 和 $(0.7 \sim 0.8) \text{ ms}$ 处没有信号, 但在相应位置重构信号的幅度较大。

因此, 为了更好地检测强噪声中的弱信号, 需要将 $j=3, 4$ 信号和噪声的小波系数进一步分离。

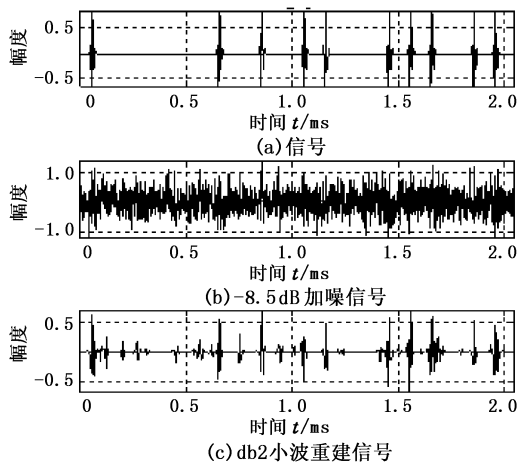


图3 -8.5 dB 加噪信号的db2小波重建信号

Fig.3 db2 WT reconstructed waveform with -8.5 dB SNR

2 奇异值分解降噪

2.1 奇异值分解理论

设矩阵 $\mathbf{H}_{m \times n}$ ($m \leq n$) 秩为 r , 则存在两个正交矩阵 $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{V}$ 和对角矩阵 $\mathbf{D}$, 使得下式成立^[8]:

$$\mathbf{H}_{m \times n} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T. \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m],$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n],$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r], \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r.$$

式中, λ_i 为矩阵 $\mathbf{H}$ 的奇异值; $\mathbf{u}_i$ 和 $\mathbf{v}_i$ 是 λ_i 的特征向量; $\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$ 为特征项。

奇异值分解是一种代数特征提取方法, 能找到矩阵各向量之间的内在本质属性。 因此加噪信号序列的奇异值分解可以提取序列主要特征, 实现信号降噪和检测。 其步骤如下:

(1) Hankle 矩阵生成。 设加噪信号序列为 $\mathbf{X} = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$, 构造 Hankle 矩阵 $\mathbf{H}$ ^[5-7]

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{J-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_J \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{L-1} & x_L & \dots & x_{L+J-2} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

矩阵 $\mathbf{H}$ 的行数 L 、列数 J 及序列 $\mathbf{X}$ 的长度 N 之间应满足

$$L + J - 1 = N. \quad (11)$$

(2) 矩阵奇异值分解。 对矩阵 $\mathbf{H}$ 进行奇异值分解, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 为矩阵 $\mathbf{H}$ 的按降序排列的非零奇

异值,即 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ 。

(3) 去噪、组合。由于瞬变信号的主要分量与
大奇异值相对应;而噪声存在整个时间上,且相互无
关,对应奇异值小。因此,设置一个阈值保留 λ_1 ,
 $\dots, \lambda_{TR}$,去掉其它的奇异值,去噪后的 Hankle 矩阵

为 $H_{new} = \sum_{i=1}^{TR} U_i \lambda_i V_i^T$ 。

(4) 重构、检测。重建时间序列 $\tilde{X}$ 中的元素 $\tilde{x}_i$
由 H_{new} 的平均对角元素表示。设 H_{new} 中的元素
 $h_{k,j}, 0 < k \leq L, 0 < j \leq J, L \leq J$,

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^{k+1} h_{m,k-m+2}, & 0 \leq k \leq L-1, \\ \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L h_{m,k-m+2}, & L-1 \leq k \leq J, \\ \frac{1}{N-k} \sum_{m=k-J+2}^{N-J+1} h_{m,k-m+2}, & J \leq k \leq N. \end{cases} \quad (12)$$

由式(12) 重建信号并检测有用信号存在与否。

2.2 参数选择

奇异值分解中,窗长 L 及保留特征值个数 TR
的选择影响降噪和检测效果。

本文首先选取 $TR=5$,窗长 L 分别选取 15、22、
30、40、60,码元中有用信号的采样点数是 30,加噪
信号的信噪比分别为 -2.5、-5.5、-8.5、-9.5、-
10.5、-11.5 dB,仿真得到如图 4 所示的 SVD 降噪
峰值信噪比与窗长 L 的关系。

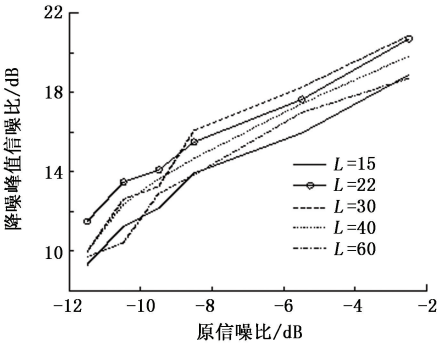


图 4 窗长对 SVD 降噪峰值信噪比的影响

Fig. 4 Effect of window length on SVD-denoised PSNR

从图 4 看出:当原信噪比大于 -8.5 dB,窗长 L
选取 30 效果最好;当原信噪比小于 -8.5 dB,窗长 L
选取 22 效果最好;窗长 L 选取过大 ($L=60$) 或过小
($L=15$) 降噪效果明显差。因此得出:①若原信噪
比较大,选择窗长 L 等于码元中有用信号长度时效
果最佳;②若原信噪比较小,选择窗长 L 比码元中
有用信号的长度稍小些降噪和检测效果最好,这是
由于信号末端采样值接近零,当噪声较强时,奇异值分

解中这部分值的特征完全被噪声淹没造成的。

然后选取窗长 $L=22$,保留特征值个数 TR 分别
选取 15、10、5、3、2,加噪信号的信噪比分别为 -2.5、-
5.5、-8.5、-9.5、-10.5、-11.5 dB,得到如图 5 所示的
SVD 降噪峰值信噪比与保留特征值个数 TR 的关系。

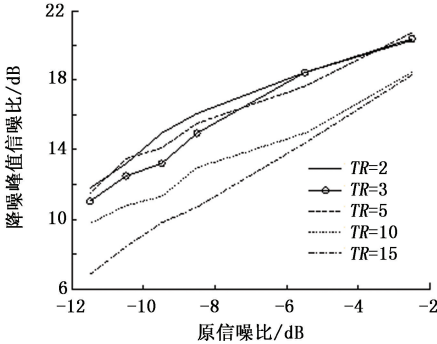


图 5 保留特征值个数 TR 对 SVD 降噪
峰值信噪比的影响

Fig. 5 Effect of main singular values'
number on SVD-denoised PSNR

从图 5 看出:①降噪后峰值信噪比随着原信噪
比的减小而减小;②保留特征值个数 $TR=2$ 峰值信噪
比最高,检测效果也最佳;③原信噪比越小, TR 的选
择对降噪后峰值信噪比的影响越大,这是由于奇异值
分解中大部分特征值已经体现不出信号的特性。

2.3 仿真与分析

在研究奇异值分解参数选择的基础上,采用奇
异值分解方法对 -8.5 dB 加噪信号检测,其中选择
参数 $L=22, TR=2$,仿真结果如图 6 所示。

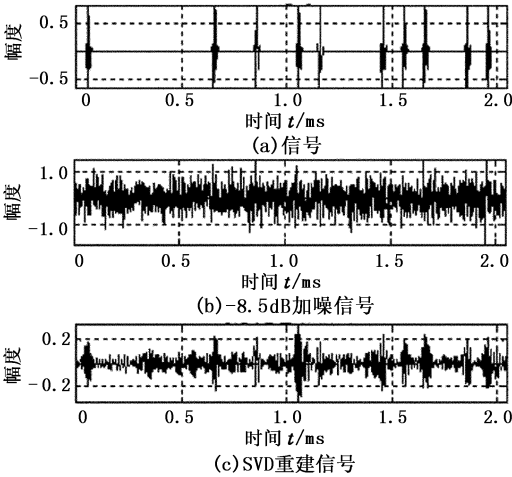


图 6 -8.5 dB 加噪信号的 SVD 重建信号
Fig. 6 Reconstructed waveform by SVD
method with -8.5 dB SNR

比较图 3(c) 和图 6(c) 可知:从检测的角度看,
奇异值分解比小波降噪后判决出错的概率小;但从

输出信噪比看,奇异值分解比小波降噪差。

3 小波奇异值分解降噪检测

通过上述分析可知,若将小波和奇异值相结合^[7-8]会使信号和噪声的小波系数更好地分离,检测效果更佳。具体方法是:首先将信号作小波分解,再对小波分解系数作奇异值分解,最后通过阈值法保留信号小波系数并重建降噪信号,利用重建信号进行信号检测。

图7(a)和图7(b)分别为信号和-8.5 dB加噪信号,采用小波阈值、奇异值分解及小波奇异值三种方法对图7(b)加噪信号降噪,降噪结果分别如图7(c)~(e)。可以看出:仅采用奇异值分解的图7(d)降噪效果最差;采用小波降噪的图7(c)虽然效果较好,但在没有信号的(0.1~0.4)ms、(0.5~0.6)ms处的重构信号的幅度较大;采用小波奇异值方法的图7(e)则可以准确检测信号的存在。因此与小波阈值法和奇异值法相比,小波奇异值法降噪和检测效果最佳。

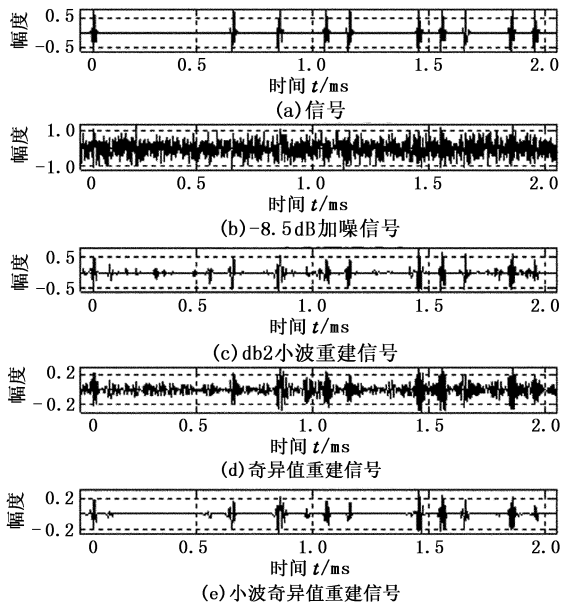


图7 -8.5 dB加噪信号的三种方法重建信号

Fig.7 Reconstructed waveforms by three methods with -8.5 dB SNR

4 结束语

针对油气井下电磁脉冲数据传输中瞬变弱信号的检测,研究了小波阈值法和奇异值分解及参数选择。在此基础上提出了小波与奇异值分解相结合降

噪检测信号的方法。仿真结果表明,该方法能更好地区分信号和噪声,获得了更好的降噪和检测结果。

参考文献:

[1] IMTIAZ H, FATTAH S A. A wavelet-based dominant feature extraction algorithm for palm-print recognition [J]. Digital Signal Processing, 2013,23(1):244-258.

[2] TOUBIN M, DUMONT C, VERRECCHIA E P, et al. Multi-scale analysis of shell growth increments using wavelet transform[J]. Computers & Geosciences, 1999, 25(8):877-885.

[3] 臧玉萍,张德江,王维正. 小波分层阈值降噪法及其在发动机振动信号分析中的应用[J]. 振动与冲击, 2009,29(8):57-60.

ZANG Yu-ping, ZHANG De-jiang, WANG Wei-zheng. Per-level threshold de-noising method using wavelet and its application in engine vibration analysis[J]. Journal of Vibration and Shock, 2009,29(8):57-60.

[4] 肖红兵,杨锦舟,鞠晓东,等. V系统在随钻声波测井数据降噪中的应用[J]. 中国石油大学学报:自然科学版, 2009,33(2):58-62.

XIAO Hong-bing, YANG Jin-zhou, JU Xiao-dong, et al. Application of V-system in acoustic logging while drilling data de-noising[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2009,33(2):58-62.

[5] ALONSO F J, DEL CASTILLO J M, PINTADO P. Application of singular spectrum analysis to the smoothing of raw kinematic signals[J]. Journal of Biomechanics, 2005, 38(5):1085-1092.

[6] ZHAO X, YE B. Selection of effective singular values using difference spectrum and its application to fault diagnosis of headstock[J]. Mech Syst Signal Process, 2011, 25(5):1617-1631.

[7] JIANG Y H, TANG B P, QIN Y, et al. Feature extraction method of wind turbine based on adaptive Morlet wavelet and SVD[J]. Renewable Energy, 2011,36(8):2146-2153.

[8] 段礼祥,张来斌,王朝晖,等. 柴油机振动信号的小波包奇异值降噪[J]. 中国石油大学学报:自然科学版, 2006,30(1):93-97.

DUAN Li-xiang, ZHANG Lai-bin, WANG Zhao-hui, et al. De-noising of diesel vibration signal using wavelet packet and singular value decomposition[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2006,30(1):93-97.

(编辑 修荣荣)