

基于二维自适应 hp 有限元的自然电位高精度计算

王正楷^{1,2}, 张贵宾¹

(1. 中国地质大学地球物理与信息技术学院, 北京 100083; 2. 中国石油大学地球科学与技术学院, 山东青岛 266580)

摘要:将自适应 hp 有限元方法引进到自然电位的计算中。采用基于参考解投影型插值后验误差估计的自适应 hp 策略引导网格 hp 细化。利用该方法求解二维轴对称条件下的自然电位的矢量势方程, 分析三层模型下的井径、钻井液、目的层电阻率、目的层厚度、侵入带半径和侵入带电阻率等因素对自然电位的影响规律。同时, 计算五层介质和两层旋度源等复杂条件下自然电位。结果表明, 该方法用较少的自由度获得较高精度的数值解, 在计算精度和效率方面明显优于其他数值方法。

关键词:自然电位; 矢量势; 自适应 hp 有限元; 数值模拟; 偶极层

中图分类号:P 631.8 **文献标志码:**A

High accuracy computations of spontaneous potential based on 2-D hp -adaptive finite element method

WANG Zheng-kai^{1,2}, ZHANG Gui-bin¹

(1. School of Geophysics and Information Technology in China University of Geosciences, Beijing 100083, China;

2. School of Geosciences in China University of Petroleum, Qingdao 266580, China)

Abstract: An hp -adaptive finite element method was introduced to the computation of spontaneous potential. The hp -adaptive strategy was based on projection-based interpolation of the reference solution which approached the true solution, and was used to solve for the vector potential equation in the two-dimensional axisymmetric media. The influences of the radius of the borehole, the mud-filtrate, the resistivity in goal formation, the thickness of the goal formation, the diameter of the invasion zone, as well as the resistivity of the invasion zone on the spontaneous potential in three-layer model were analyzed. The spontaneous potential was calculated in a complicated environment in which five-layer formation and two-layer sources were present. Numerical results show that the hp -adaptive finite element method can achieve higher accuracy level with less number of degrees of freedom, and provide better computation accuracy and efficiency than any other numerical method.

Key words: spontaneous potential; vector potential; hp -adaptive finite element; numerical modeling; dipole layers

自然电位是最早的电法测井之一, 已有的校正图版是基于简单模型制作的, 不再适应复杂的井眼环境^[1]。复杂条件下快速高精度计算是自然电位影响因素校正和自然电位信息进一步被发掘的基础^[2]。自然电位数值计算模型还局限于二维轴对称条件下, 电偶极层的存在使得有效的数值方法无法直接应用到自然电位的计算中。张庚骥等提出了使用旋度源描述电偶极子的矢量势方程^[4-5], 并采用有限元求解矢量方程, 给出相应的校正图版^[6], 更

加简单地描述电偶极子层, 有利于正演和反演计算^[7]。考虑电偶极层的另外一种方式是将电势不连续吸收到解析解中, 利用有限元计算剩余电势满足的标量方程, 这种数学模型基础理论研究较为系统全面, 使用有限元求解了不同模型下的自然电位^[8-15]。自然电位的有限差分方法^[16-17]无法考虑具体问题解的特征, 对于复杂问题, 很难给出有效网格, 计算精度不高。自适应 hp 有限元方法^[18-24]是在有限元框架下, 根据后验误差估计, 自动调整网格单

收稿日期:2013-03-01

基金项目: 中国国家专项项目(SinoProbe-02); 中国地质调查局地质调查项目(科[2012]01-046-012); 国家科技重大专项(2011ZX05009-003)

作者简介: 王正楷(1978-), 男, 讲师, 博士研究生, 主要从事电法测井理论与方法的教学和科研工作。E-mail: wzkupc@126.com。

元尺寸 h 和多项式阶数 p , 寻找适合于问题真解特征的拟最优的单元剖分和多项式阶数。笔者采用自适应 hp 有限元方法来求解矢量势方程。

1 矢量势方程

自然电位矢量将电偶极层等效为旋度源, 消除了跨越电偶极层电势的不连续性。当介质为轴对称分布时, 电场强度 \mathbf{E} 在柱坐标系 (r, ϕ, z) 下满足

$$(\nabla \times \mathbf{E})_\phi = \varepsilon_{ssp} \delta(r-r_s) \delta(z-z_s) \quad (1)$$

式中, ε_{ssp} 为静自然电位; (r_s, z_s) 为旋度源的坐标。

自然电位的电流密度 \mathbf{j} 满足无旋条件, 因此它可表示为一个矢量 \mathbf{Y} 的旋度

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{Y} \quad (2)$$

轴对称情况下, 矢量 \mathbf{Y} 只有 ϕ 分量存在, 式(2)写成分量的形式为

$$\begin{cases} j_r = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial V}{\partial z} \\ j_z = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial V}{\partial r} \end{cases} \quad (3)$$

其中 $V = 2\pi r Y_\phi$, 称为矢量势。

将式(3)代入到式(1), 考虑本构方程 $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$, 可得

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho}{r} \frac{\partial V}{\partial z} \right) = -2\pi \varepsilon_{ssp} \delta(r-r_s) \delta(z-z_s) \quad (4)$$

其中, ρ 为介质的电阻率。式(4)为自然电位矢量势方程。

2 自适应 hp 有限元

自适应 hp 有限元在迭代计算中根据后验误差估计自动对当前粗网格进行细化调整, 有效的自适应 hp 策略可以保证自适应 hp 有限元具有指数收敛特性。本文中采用参考解投影的自适应策略, 它利用真实解的近似解判断解的光滑或剧烈变化等特性, 对解较为光滑的单元采用 p 细化, 而对于解变化较为剧烈的单元采用 h 细化。该种策略具有普适性, 也是 hp 策略中最有效的一种。

2.1 Galerkin 方法离散

在轴对称条件下, 求解区域退化成二维无限大子午面。截断子午面, 得到该问题的求解区域, 记为 Ω 。它是由 $r=r_0, r=r_\infty, z=z_{-\infty}$ 和 $z=z_\infty$ 四条直线围成的区域, 将该区域的边界记为 Γ 。

在边界上施加第一类边界条件, 式(4)构成边值问题, 使用 Galerkin 方法将边值问题转化为变分问题:

$$\int_\Omega \frac{\rho}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) dr dz = \int_\Omega 2\pi \varepsilon_{ssp} \delta(\rho -$$

$$\rho') \delta(z-z') W dr dz \quad (5)$$

式中, V 为试探函数; W 为检验函数。

利用自适应 hp 有限元解 V , 井中电势为

$$U_z - U_{z_0} = \frac{1}{2\pi a \sigma_m} \int_{z_0}^z \frac{\partial V}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} dz \quad (6)$$

式中, U_z 为 z 点的电势, V ; U_{z_0} 为 z_0 点的电势, V 。

2.2 变阶四边形单元

自适应 hp 有限元采用变阶的网格单元^[22], 即每个单元上基函数的阶数不同。物理单元的插值函数通过参考单元的映射完成, 因此只考虑参考单元的形状函数。如图1所示, 参考单元定义在区域 $[0, 1]^2$ 上。单元上定义顶点节点 v_1, v_2, v_3 与 v_4 , 边节点 e_1, e_2, e_3 与 e_4 , 和内部节点 w 三种类型, 每个节点上定义一个或者多个形状函数。单元节点上的形状函数可以是各向异性的, 即关于 ξ_1 和 ξ_2 的阶数是不同的。假设关于 ξ_1 的阶数为 p_h , 关于 ξ_2 的阶数为 p_v , 边节点 e_1, e_2, e_3 与 e_4 上插值函数的阶数分别为 p_1, p_2, p_3 和 p_4 , 为了满足单元的协调性, 要求 $p_1, p_3 \leq p_h, p_2, p_4 \leq p_v$ 。

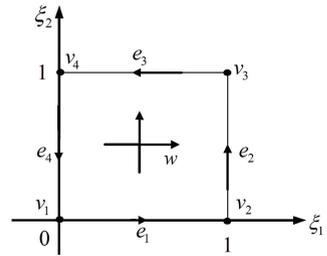


图1 参考单元(顶点节点、边节点和单元节点)

Fig.1 Reference element (vertex node, edge node and element node)

每个顶点型节点对应的一个双线性形状函数定义为

$$\begin{cases} \hat{\phi}_1(\xi_1, \xi_2) = (1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \\ \hat{\phi}_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_1(1 - \xi_2) \\ \hat{\phi}_3(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \xi_2 \\ \hat{\phi}_4(\xi_1, \xi_2) = (1 - \xi_1) \xi_2 \end{cases} \quad (7)$$

每个边节点对应的 p_i 个形状函数为

$$\begin{cases} \hat{\phi}_{5,j}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\chi}_{2+j}(\xi_1) \hat{\chi}_1(\xi_2), j = 1, \dots, p_1 - 1 \\ \hat{\phi}_{6,j}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\chi}_2(\xi_1) \hat{\chi}_{2+j}(\xi_2), j = 1, \dots, p_2 - 1 \\ \hat{\phi}_{7,j}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\chi}_{2+j}(1 - \xi_1) \hat{\chi}_2(\xi_2), j = 1, \dots, p_3 - 1 \\ \hat{\phi}_{8,j}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\chi}_1(\xi_1) \hat{\chi}_{2+j}(1 - \xi_2), j = 1, \dots, p_4 - 1 \end{cases} \quad (8)$$

单元节点对应的 $(p-1)(q-1)$ 个形状函数为

$$\hat{\phi}_{9,ij}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\chi}_{2+i}(\xi_1) \hat{\chi}_{2+j}(\xi_2) \quad (8)$$

$$i = 1, \dots, p_h - 1, j = 1, \dots, p_v - 1. \quad (9)$$

其中 $\hat{\chi}_i(\xi)$ 为一维形状函数。

2.3 投影型插值

投影型插值^[19]是在投影基础上的插值,它是自适应策略的重要组成部分。以四边形为例,根据自适应 hp 有限元插值函数的构成,节点插值函数可以分成顶点型、边型和内部型三类,它们从不同层面逼近问题的真解。假设函数 u 为待插值的函数,投影型插值函数为 u_{opt} , 顶点型节点标识为 $v_i (i = 1, \dots, 4)$, 边型节点标识为 $e_i (i = 1, \dots, 4)$ 和内部型节点标识为 w , 则投影型插值函数 u_{opt} 满足

$$u_{opt}(v_i) := u(v_i), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (10)$$

$$\|u_{opt} - u\|_{1/2, e_i} \rightarrow \min, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (11)$$

$$\|u_{opt} - u\|_{1, K} \rightarrow \min, \quad \text{in } K. \quad (12)$$

其中, $\|\cdot\|_{1/2, e_i}$ 为能量范数在边 e_i 上的迹, $\|\cdot\|_{1, K}$ 为单元 K 上的能量范数。式(10)为满足顶点的插值条件,式(11)为插值函数在每个边上的投影,式(12)为插值函数在单元内部的投影。

2.4 自适应 hp 策略^[23]

通过对当前粗网格进行 h 细化和 p 升高一阶得到细化网格上的有限元解称为当前粗网格的参考解,记为 $u_{h/2, p+1}$ 。该参考解在当前粗网格上的投影型插值记为 $\Pi_{h/2, p+1}$, 自由度数目为 N , 该参考解在最优的粗网格上的插值型投影为 $\Pi_{opt} u_{h/2, p+1}$, 自由度数目 N_{opt} , 则满足下列条件:

$$\frac{\|u_{h/2, p+1} - \Pi_{opt} u_{h/2, p+1}\|_{H^1}}{N_{opt} - N} \rightarrow \max. \quad (13)$$

式中, $\|\cdot\|_{H^1}$ 为函数的 $H^1(\Omega)$ 范数。式(13)表示寻找最优的细化网格就是寻找自由度增加相同时误差下降最大的网格。

实际计算中,式(13)的全局优化问题转化为网格单元上的局部优化问题进行求解。为了减少局部优化问题的个数,将局部优化问题依次分解为边上优化问题和面上优化问题处理。将单元边上的最优网格对应的单位增加自由度数目的误差下降称为边上误差下降速率,本质上为式(13)在单元边上的形式,定义为

$$r_{e_i} = \frac{\|u_{h/2, p+1} - \Pi_{hp}^{e_i} u_{h/2, p+1}\|_{1/2, e_i}^2}{n_{hpopt}^{e_i} - n_{hp}^{e_i}} \quad (14)$$

式中, $\Pi_{hp}^{e_i} u_{h/2, p+1}$, $\Pi_{hpopt}^{e_i} u_{h/2, p+1}$ 分别为参考解在当前粗网格和待确定的最优网格的第 i 个边上的投影型插值; $n_{hp}^{e_i}$, $n_{hpopt}^{e_i}$ 分别为相应网格上第 i 个边的自由度数目。

类似,单元的误差下降速率定义为

$$r_{e_i} = \frac{\|u_{h/2, p+1} - \Pi_{hp}^i u_{h/2, p+1}\|_i^2}{n_{hpopt}^i - n_{hp}^i} \quad (15)$$

式中, $\Pi_{hp}^i u_{h/2, p+1}$ 和 $\Pi_{hpopt}^i u_{h/2, p+1}$ 分别为参考解在当前粗网格和待确定的最优网格的第 i 个单元上的投影型插值; n_{hp}^i 和 n_{hpopt}^i 分别为相应网格上第 i 个单元的自由度数目。

这种方法的有效性在于对粗网格中的每一个四边形单元进行 h 细化、 p 细化和同时 hp 细化后得到细化单元的自由度大于粗网格的,而小于该粗网格对应的参考单元的。

2.5 自适应 hp 过程

自适应 hp 过程从一个粗网格开始,根据粗网格上有限元解和某些已知参数,计算当前粗网格的后验误差估计,对当前粗网格单位 h 和多项式阶数 p 进行调整,获得基于当前粗网格上的最优的细化网格。再把获得的最优细化网格作为新一轮的粗网格,以此类推,直到获得满足容许误差的细网格。该过程通过以下步骤完成:

(1) 分别求解粗网格和参考网格上的有限元的解 $u_{h, p}$ 和 $u_{h/2, p+1}$, 如果 $\|u_{h/2, p+1} - u_{h, p}\| / \|u_{h/2, p+1}\|$ 小于给定的容许误差, 停止计算并将 $u_{h/2, p+1}$ 作为有限元的解, 否则进入步骤(2)。

(2) 将参考解 $u_{h/2, p+1}$ 投影到粗网格单元的每条边上, 计算边上的误差下降速率 r_{e_i} 和对应的细化方式, 标记误差下降方式满足 $r_{e_i} > 0.4 \times \max_j r_{e_j}$ 所有边作为需要 hp 细化边。

(3) 将参考解 $u_{h/2, p+1}$ 投影到步骤(2)确定的待细化边所在的单元, 计算这些单元上的误差下降速率 r_i , 记录下降率和细化方式, 标记误差下降方式满足 $r_i > 0.4 \times \max_j r_j$ 所有单元作为需要 hp 细化单元。

(4) 按照对应的细化方式对标记为细化的单元进行 hp 细化, 同时使用单元插值函数的最小原则确定单元边的阶数。

(5) 通过步骤(4)细化后的单元是当前粗网格的最优的 hp 单元, 将它作为下一次迭代的粗单元网格, 返回步骤(1)。

3 响应计算

3.1 解析验证

假设中心轴与井轴一致半径为 a 、高为 b 的圆柱面上存在偶极层,其静自然电位为 SSP ,则无限大均匀介质井轴中心的电位^[6]为

$$SP_{(x)} = -\frac{SSP}{4\pi} \begin{cases} 4\pi - \Omega_1 - \Omega_2, & X \text{ 在圆柱体内;} \\ \Omega_1 - \Omega_2, & X \text{ 在圆柱体上;} \\ \Omega_2 - \Omega_1, & X \text{ 在圆柱体下.} \end{cases}$$

其中, Ω_1 为观测点与圆柱体上表面 s_1 所张成的立体角, Ω_2 为观测点与圆柱体下表面 s_2 所张成的立体角。

自适应 hp 计算中,取子午面上横坐标为 0 m 和 100 m ,纵坐标为 -100 m 和 100 m 所限定的区域,电导率为 0.1 S/m 的均匀介质,自然电位的旋度源分别位于坐标 $(2.0\text{ m}, -2.0\text{ m})$ 和 $(2.0\text{ m}, 2.0\text{ m})$ 处,取参考解和自适应 hp 解的相对误差为 0.1% 。

图 2 显示自适应 hp 有限元解和解析解完全吻合,表明自适应 hp 有限元的正确性和高精度特性。图 3 中不同颜色代表 ϕ 分量矢量势,可以看出,旋度源附近解不够准确,等值线比较模糊。图 4(a) 显示旋度源附近矢量势精度显著提高,等值线更加清晰。图 4(b) 显示旋度源附近网格得到进一步细化,说明自适应 hp 捕捉到问题解的特征,得到了优化的有限元网格。

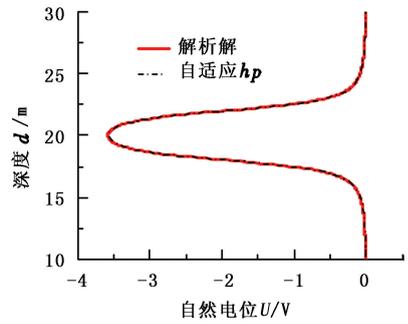


图 2 自适应 hp 有限元解和解析解对比

Fig. 2 Comparison between hp -adaptive finite element solution and analytical solution

自适应 hp 有限元在迭代计算中逐步抓住问题解的特征,对自由度资源进行有效合理分配。它的计算效果通过自适应 hp 有限元的收敛曲线来表征。由于自适应 h 和自适应 hp 有限元的优势明显优于传统有限元,因此只比较自适应 hp 有限元和自适应 h 有限元的收敛特性。图 5(a) 显示自适应 h 和自适应 hp 有限元随着自由度个数的增加相对能量误差都在下降,但自适应 hp 有限元下降明显优于自适应 h 有限元,说明了自适应 hp 有限元用最少的自由度获得最高计算精度。图 5(b) 表明,获得相同的计算精度,自适应 hp 有限元使用的时间小于自适应 h 有限元的时间,说明了自适应 hp 有限元在 CPU 时间方面明显优于自适应 h 有限元。

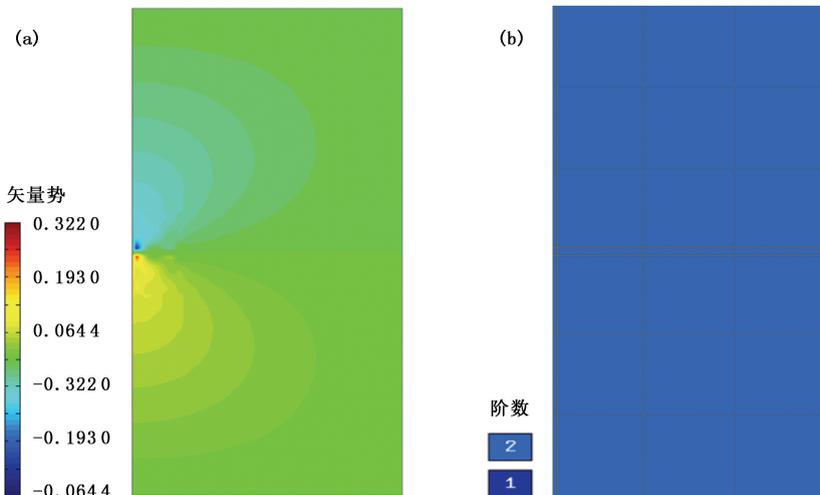


图 3 初始粗网格和多项式阶数分布以及网格上自然电位矢量势参考解

Fig. 3 Spontaneous potential vector reference solution and distribution of polynomial order on initial coarse grid

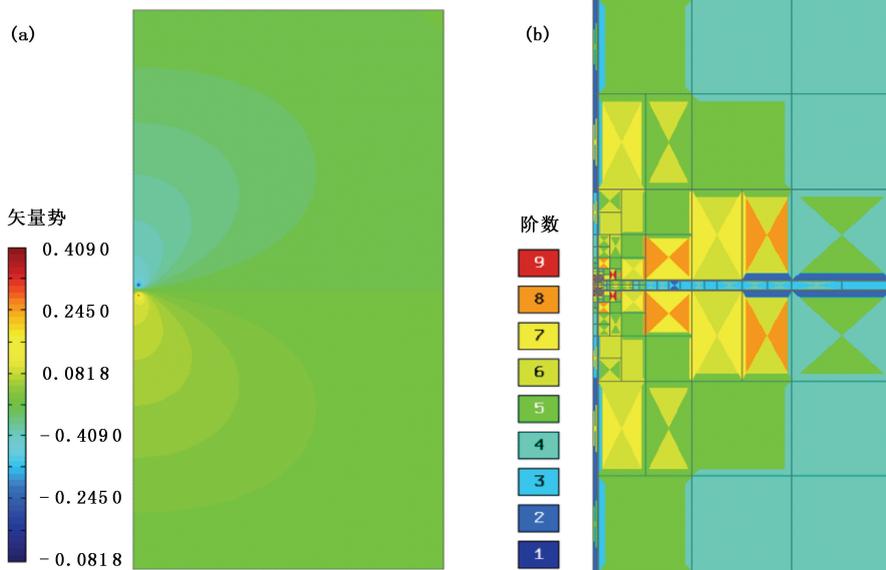


图 4 自适应 20 次的粗网格和多项式阶数分布以及自然电位矢量势参考解

Fig. 4 Spontaneous potential vector reference solution and distribution of polynomial order on the 20th coarse grid

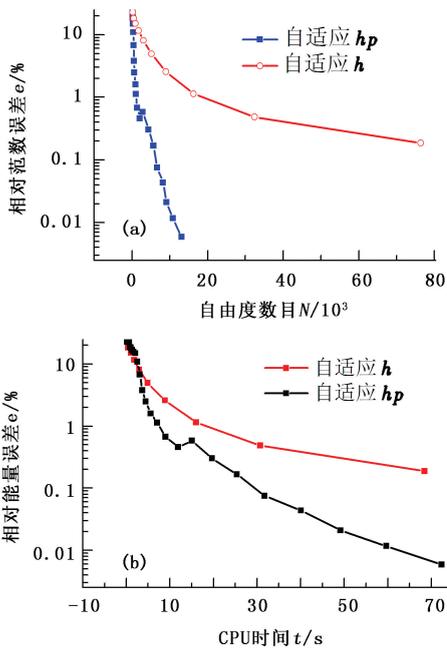


图 5 自适应 h 和自适应 hp 有限元收敛曲线对比

Fig. 5 Comparison of convergence history between h -adaptive and hp -adaptive FEM

3.2 三层模型

图 6 为轴对称条件下三层模型的示意图以及井眼半径 r_1 、钻井液电阻率 R_m 、目的层电阻率 R_1 、目的层厚度、侵入带半径和侵入带电阻率 R_i 等因素对自然电位的影响规律。图中, R_{s1} 和 R_{s2} 分别为上、下围岩电阻率, r_2 为侵入带半径, z_1 和 z_2 分别为目的层下边界和上边界, 图中圆圈为自然电位旋度源的位置。计算区域为子午面上坐标, 分别为 $z_\infty = 240$ m, $z_{-\infty} = -240$ m, $r_0 = 0$ m, $r_\infty = 300$ m 所限定的区域, 参

考解和自适应 hp 解的相对误差取为 0.1%。

图 6(b) 为不同井眼半径下的自然电位。三层模型的参数中 r_1 是变化的, 分别取 10、14、18 和 22 cm。其他参数固定: $R_m = 0.5 \Omega \cdot m$, $R_1 = 2 \Omega \cdot m$, $R_i = 40$, $R_{s1} = R_{s2} = 10 \Omega \cdot m$, $r_2 = 1$ m, $z_1 = -1.8$ m 和 $z_2 = 1.8$ m。可以看出, 在其他参数相同的条件下, 相对自然电位随井径的增加而降低。

图 6(c) 为不同钻井液电阻率下的自然电位。三层模型的钻井液电阻率 R_m 是变化的, 分别为 0.5、2.5 和 5.0 $\Omega \cdot m$ 。其他参数固定不变: $R_1 = 2 \Omega \cdot m$, $R_i = 20 \Omega \cdot m$, $R_{s1} = R_{s2} = 10 \Omega \cdot m$, $r_1 = 0.1$ m, $r_2 = 1$ m, $z_1 = -1.8$ m 和 $z_2 = 1.8$ m。可以看出, 在其他参数相同的条件下, 相对自然电位随钻井液电阻率的增加而增加。

图 6(d) 为不同侵入半径下的自然电位。三层模型的参数 r_2 是变化的, 分别为 10、30、50、70 和 90 cm。其他参数固定不变: $R_m = 0.1 \Omega \cdot m$, $R_1 = 4 \Omega \cdot m$, $R_i = 10 \Omega \cdot m$, $R_{s1} = R_{s2} = 10 \Omega \cdot m$, $r_1 = 0.1$ m, $z_1 = -2$ m 和 $z_2 = 2$ m。可以看出, 在其他参数相同的条件下, 相对自然电位随侵入半径的增加而降低。

图 6(e) 为不同侵入电阻率下的自然电位。三层模型的侵入带的电阻率 R_i 是变化的, 分别为 1、3、5 和 7 $\Omega \cdot m$ 。其他参数固定: $R_m = 0.5 \Omega \cdot m$, $R_1 = 10 \Omega \cdot m$, $R_{s1} = R_{s2} = 5 \Omega \cdot m$, $r_1 = 0.1$ m, $r_2 = 1$ m, $z_1 = -2$ m 和 $z_2 = 2$ m。可以看出, 在其他参数相同的条件下, 相对自然电位随侵入带电阻率的增加而增加。

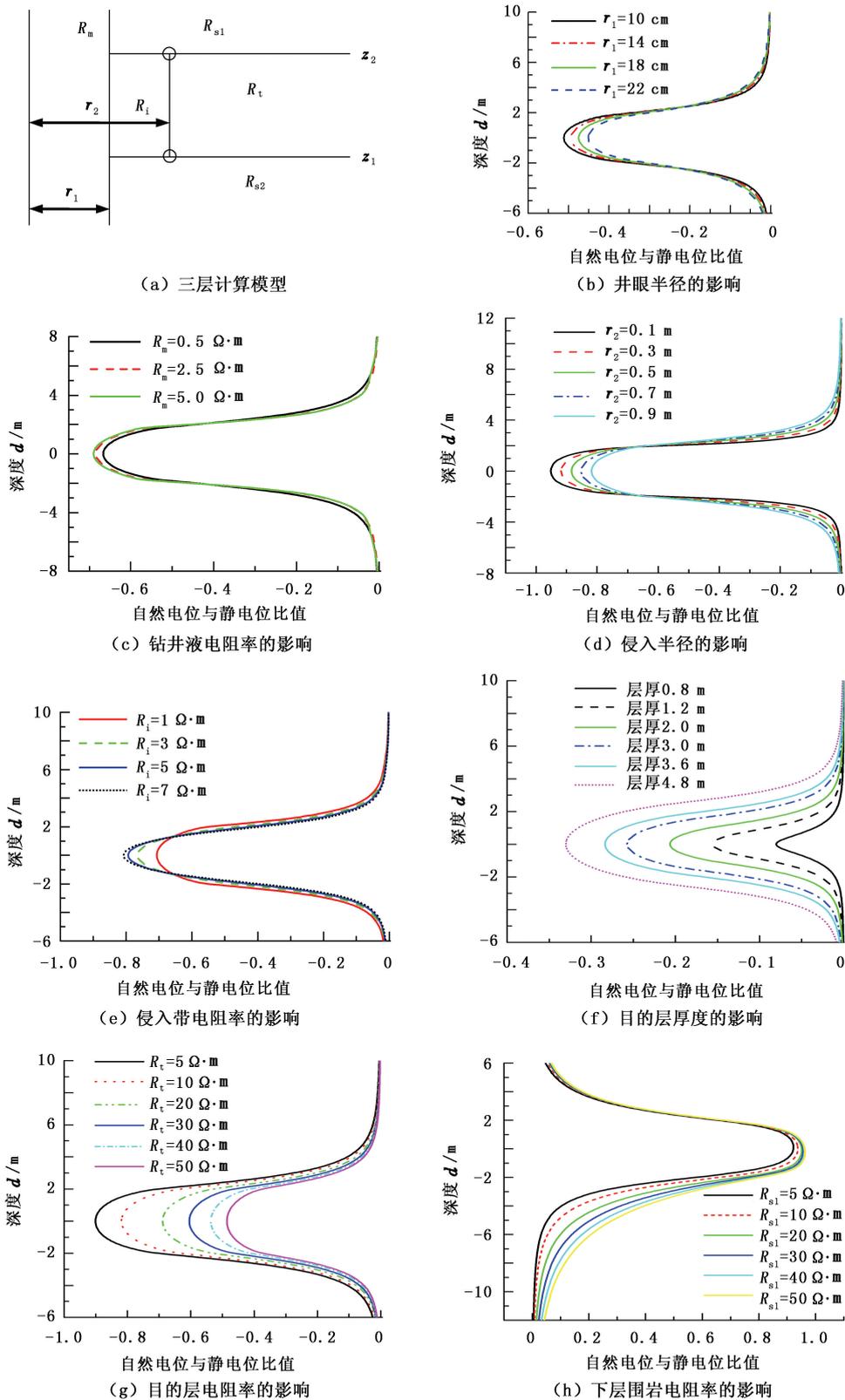


图 6 三层计算模型及各因素对自然电位的影响规律

Fig. 6 Three-layer computing model and influence of each factor on spontaneous potential

图 6(f) 为不同目的层厚度下的自然电位。三层模型的目的层厚度 $z_2 - z_1$ 是变化的, 分别为 0.8、1.2、2.0、3.0、3.6 和 4.8 m。其他参数固定: $R_m =$

$0.5 \Omega \cdot m, R_i = 4 \Omega \cdot m, R_t = 150 \Omega \cdot m, R_{s1} = R_{s2} = 10 \Omega \cdot m, r_1 = 0.1 m, r_2 = 1 m$ 。可以看出, 在其他参数相同的条件下, 相对自然电位随目的层厚度的增加

而增加。

图 6(g) 为不同目的层电阻率下的自然电位。三层模型目的层电阻率 R_1 是变化的,分别为 5、10、20、30、40、50 $\Omega \cdot m$ 。其他参数固定: $R_m=0.5 \Omega \cdot m, R_i=2 \Omega \cdot m, R_{s1}=R_{s2}=10 \Omega \cdot m, r_1=0.1 m, r_2=1 m, z_1=-2 m$ 和 $z_2=2 m$ 。可以看出,在其他参数相同的条件下,相对自然电位随目的层电阻率的增加而降低。

图 6(h) 为不同下围岩电阻率时的自然电位。三层模型的下围岩参数 R_{s2} 是变化的,分别为 5、10、20、30、40 和 50 $\Omega \cdot m$ 。其他参数固定: $R_m=0.5 \Omega \cdot m, R_i=2 \Omega \cdot m, R_1=0.5 \Omega \cdot m, R_{s1}=10 \Omega \cdot m, r_1=0.1 m, r_2=1 m, z_1=-2 m$ 和 $z_2=2 m$ 。可以看出,在其他参数相同的条件下,相对自然电位随下围岩层电阻率的变化而变化,当上下围岩的不对称时,相对自然电位也不对称,随着下层围岩与上层围岩电阻率的比值增加而增大。

3.3 五层介质模型

图 7 为五层介质的自然电位计算模型。该模型参数定义如下: R_m 为钻井液电阻率, R_i 为侵入带电阻率, R_1 为目的层电阻率, R_{s1} 为最下层地层电阻率, R_{s2} 为最上层地层电阻率, R_s 为围岩电阻率, r_1 为井眼半径, r_2 为侵入带半径, z_1, z_2, z_3, z_4 为地层的边界。

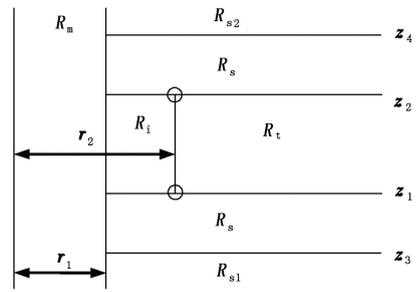


图 7 五层自然电位计算模型

Fig. 7 Five-layer computing modeling of spontaneous potential

图 8 左图为不同围岩电阻率时的自然电位。五层模型的围岩电阻率 R_s 是变化的,分别为 1、10 和 100 $\Omega \cdot m$ 。其他参数固定: $R_m=2 \Omega \cdot m, R_i=4 \Omega \cdot m, R_1=5 \Omega \cdot m, R_{s1}=100 \Omega \cdot m, R_{s2}=100 \Omega \cdot m, r_1=0.1 m, r_2=1 m, z_1=-2.4 m, z_2=2.4 m, z_3=-3 m, z_4=3 m$ 。可以看出,自然电位随围岩电阻率增大而增大。

图 8 右图为不同围岩厚度时的自然电位。五层模型的围岩的厚度 z_4-z_2 和 z_1-z_3 是变化的,分别为 0.6、2.6 和 5.6 m。其他参数固定: $R_m=2 \Omega \cdot m, R_i=4 \Omega \cdot m, R_1=5 \Omega \cdot m, R_{s1}=R_{s2}=100 \Omega \cdot m, R_s=50 \Omega \cdot m, r_1=0.1 m, r_2=1 m, z_1=-2.4 m$ 。可以看出,自然电位随围岩厚度变化而变化,但变化得不太明显。

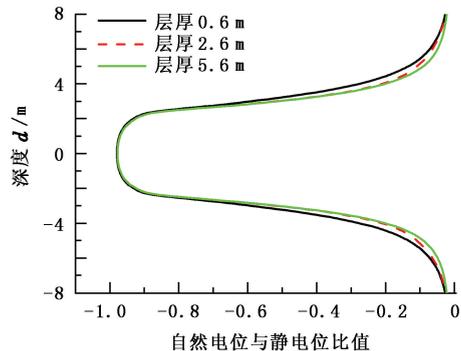
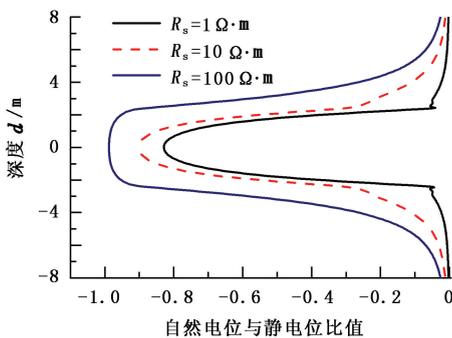


图 8 围岩电阻率与厚度对五层介质模型自然电位的影响

Fig. 8 Influence of surround rock resistivity and formation thickness on spontaneous potential of five-layer computing modeling

3.4 两层源模型

图 9 为相邻的两层源条件下的自然电位计算模型。 R_{i1} 为下层源的侵入带电阻率, R_{i1} 为下层源的目的层电阻率, R_{s1} 为下层源的下层围岩的电阻率, R_{i2} 为上层源的侵入带电阻率, R_{i2} 为上层源目的层电阻率, R_{s2} 为上层源的上层围岩的电阻率, R_{mid} 为上下两层源之间地层的电阻率。 r_2 为下源层侵入带半径,

r_3 为上源层侵入带半径, z_1 和 z_3 分别为下源层的上下坐标, z_4 和 z_2 分别为上源层的上下坐标。

图 10(a) 为两层同号源条件下中间夹层电阻率不同时自然电位。两层源模型参数 R_{mid} 是变化的,分别为 20、50 和 100 $\Omega \cdot m$ 。其他参数固定: $R_m=5 \Omega \cdot m, R_{i1}=R_{i2}=0.5 \Omega \cdot m, R_{i1}=R_{i2}=5 \Omega \cdot m, R_{s1}=R_{s2}=20 \Omega \cdot m, r_1=0.1 m, r_2=r_3=1 m, z_1=-1 m, z_2$

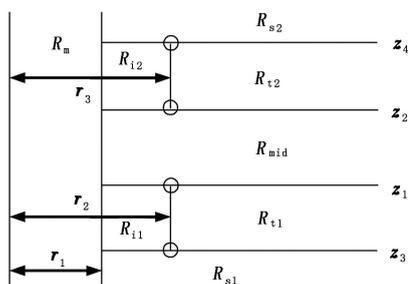
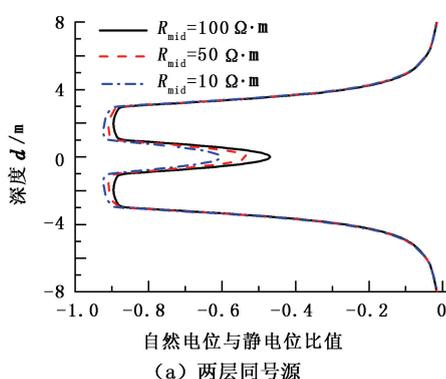
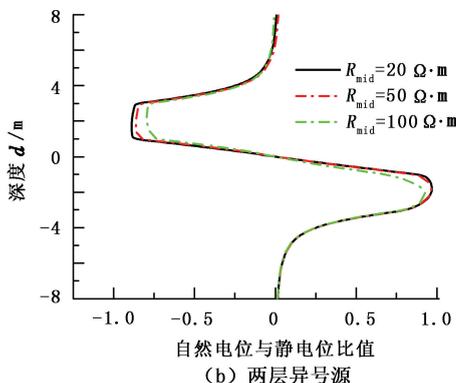


图9 两层源条件下自然电位计算模型
Fig.9 Two-layer source computing model of spontaneous potential

= 1 m, $z_3 = -3$ m, 和 $z_4 = 3$ m。可以看出,自然电位受到中间围岩电阻的影响,中间层厚度为 2 m 时,两源



(a) 两层同号源



(b) 两层异号源

图10 中间夹层电阻率对两层源模型自然电位的影响

Fig.10 Influence of middle formation resistivity on spontaneous potential of two-layer source computing model

4 结论

(1) 自适应 hp 有限元能够捕捉到问题解的特征,使用最少的自由度得到最大的计算精度。从自适应 h 和 hp 有限元的收敛曲线可以看出,自适应 hp 有限元明显优于自适应 h 有限元。

(2) 使用自适应 hp 有限元得出了井眼半径、钻井液电阻率、侵入带半径、侵入带电阻率、目的层厚度和目的层电阻率等因素对自然电位的影响规律。对 5 层介质和 2 层源等复杂条件下自然电位的计算结果进一步说明自适应 hp 有限元在处理复杂问题方面的优势。二维自适应 hp 有限元方法是复杂条件下自然电位计算有效的高精度算法。

参考文献:

[1] 张庚骥. 电法测井(上册) [M]. 北京:石油工业出版社,1996.
[2] 雍凡,潘和平. 自然电位测井数值模拟进展[J]. 工程地球物理学报,2008,5(5):602-607.
YONG Fan, PAN He-ping. Spontaneous potential well

层的自然电位未完全分开,但相对自然电位随中间层电阻率的增大而增大。

图 10(b) 为两层异号源条件下中间夹层电阻率不同的自然电位。两层源模型的参数 R_{mid} 是变化的,分别为 10、50 和 100 $\Omega \cdot m$ 。其他参数固定: $R_m = 5 \Omega \cdot m, R_{i1} = 5 \Omega \cdot m, R_{i2} = 0.5 \Omega \cdot m, R_{i1} = 0.5 \Omega \cdot m, R_{i2} = 5 \Omega \cdot m, R_{s1} = R_{s2} = 20 \Omega \cdot m$, 分别为 $r_1 = 0.1$ m, $r_2 = r_3 = 1$ m, $z_1 = -1$ m, $z_2 = 1$ m, $z_3 = -3$ m 和 $z_4 = 3$ m。可以看出,自然电位受到中间围岩电阻的影响,中间层厚度为 2 m 时,两源异号层的自然电位未完全分开,但相对自然电位随中间层电阻率的增大而增大。

logging numerical modeling: a review of the theory and applications[J]. Chinese Journal of Engineering Geophysics, 2008,5(5):602-607.

[3] 范晓敏,李舟波. 自然电位测井数值计算中的激励源分布[J]. 吉林大学学报:地球科学版,2012,42(4):895-899.
FAN Xiao-min, LI Zhou-bo. Distribution of source in numeric modeling of spontaneous potential log[J]. Journal of Jilin University (Earth Science Edition), 2012,42(4):895-899.
[4] ZHANG Geng-ji, WANG Gong-li. Application of vector potential theory to spontaneous potential computation[J]. Radio Science,1997,32(3):899-905.
[5] ZHANG Geng-ji, WANG Gong-li. A new approach to SP computation-vector potential approach[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1999,37(4):2092-2098.
[6] LI Shan-jun, LIU R C, NAVARRO D, et al. Joint inversion of sp and dual laterolog/dual induction data in 2nd formation[J]. SPWLA 48th Annual Logging Symposium, Paper ZZ, June, 2007.

- [7] 张庚骥. 电测井算法[M]. 北京:石油工业出版社, 2009.
- [8] 潘克家,谭永基,胡宏伶,等. 非均质地层中自然电位测井的数学模型和数值方法[J]. 应用数学与力学, 2009,30(2):203-212.
PAN Ke-jia, TAN Yong-ji, HU Hong-ling, et al. Mathematical model and numerical method for spontaneous potential log in heterogeneous medium[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2009,30(2):203-212.
- [9] 潘克家,谭永基. 复杂地层中自然电位测井的高效数值模拟[J]. 石油地球物理勘探, 2009,44(3):371-376.
PAN Ke-jia, TAN Yong-ji. High efficient numeric simulation of spontaneous potential log in complex beds[J]. Oil Geophysical Prospecting, 2009,44(3):371-376.
- [10] 孔峰,朱泰英. 有限元在自然电位测井中的应用[J]. 上海电机学院学报, 2010,13(4):232-235.
KONG Feng, ZHU Tai-ying. Application of FEM in spontaneous potential well logging [J]. Journal of Shanghai Dianji University, 2010,13(4):232-235.
- [11] 左立华,陈妮. 自然电位测井的双层位势法[J]. 工程数学学报, 2008,25(6):1013-1022.
ZUO Li-hua, CHEN Wei. Double layer potential method for the spontaneous well-logging[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008,25(6):1013-1022.
- [12] 陈妮,左立华. 自然电位测井数学模型的一类求解方法[J]. 应用数学学报, 2009,32(4):732-745.
CHEN Wei, ZUO Li-hua. A general class of semiparametric rates models for recurrent event data[J]. Acta Mathematicae Application Sinica, 2009,32(4):732-745.
- [13] 魏得灵,许盈. 非对称情形下自然电位测井方程的近似解[J]. 复旦大学学报:自然科学版, 2009,48(3):322-332.
WEI De-ling, XU Ying. Approximate solution of the spontaneous potential well logging equation for asymmetric rock layers structure[J]. Journal of Fudan University (Natural Science), 2009,48(3):322-332.
- [14] 孔峰,谭永基. 自然电位测井中的一个数值算法[J]. 复旦大学学报:自然科学版, 2010,49(4):483-490.
KONG Feng, TAN Yong-ji. A numerical method for spontaneous potential well-logging[J]. Journal of Fudan University (Natural Science), 2010,49(4):483-490.
- [15] 李大潜,蔡志杰,陈妮,等. 自然电位测井数学模型与求解方法[J]. 测井技术, 2012,36(3):211-224.
LI Tatsien, CAI Zhi-jie, CHEN Wei, et al. Mathematical modeling and numerical method for the spontaneous potential well-logging [J]. Well Logging Technology, 2012,36(3):211-224.
- [16] 王斌,范晓敏,陈启艳,等. 用有限差分法模拟自然电位测井的侵入带影响[J]. 测井技术, 2008,32(2):164-168.
WANG Bing, FAN Xiao-min, CHEN Qi-yan, et al. Modeling effect of invaded zone on SP log with finite difference method[J]. Well Logging Technology, 2008,32(2):164-168.
- [17] LI Can-hua, PAN Ke-jia. A jump condition capturing finite difference scheme for spontaneous potential log[J]. Journal of Natural Science of Hunan Normal University, 2010,33(1):17-22.
- [18] PARDO D, DEMKOWICZ L F, TORRES-VERDIN, et al. A goal-oriented hp -adaptive finite element method with electromagnetic applications. Part I: electrostatics [J]. Int J Numer Methods Engrg, 2006,65(8):1269-1309.
- [19] VARCIA-CASTILLO L E, PARDO D, GARCA-CASTILLO L E, et al. A two-dimensional self-adaptive hp finite element method for the characterization of waveguide discontinuities. Part I: energy-norm based automatic hp -adaptivity [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2007,196:4823-4852.
- [20] PARDO D, DEMKOWICZ L F, TORRES-VERES C, et al. Simulation of resistivity logging-while-drilling (LWD) measurements using a self-adaptive goal-oriented hp -finite element method[J]. SIAM J Appl Math, 2006,66(6):2085-2106.
- [21] DEMKOWICZ L F, RACHOWICZ W, DEVLOO P. A fully automatic hp adaptivity in three dimension [J]. J Sci Comput, 2002,17(1-3):127-155.
- [22] DEMKOWICZ L F. Computing with hp -adaptive finite elements, Vol. I: one and two dimensional elliptic and maxwell problems[M]. Taylor and Francis; Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
- [23] KURTZ J, DEMKOWICZ L F. A fully automatic hp -adaptivity for elliptic PDEs in three dimensions [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007,196:3534-3545.
- [24] 刘得军,马中华,苑赫,等. 自适应高阶矢量有限元方法在随钻电阻率测井中的应用[J]. 中国石油大学学报:自然科学版, 2012,36(4):77-83.
LIU De-jun, MA Zhong-hua, YUAN He, et al. Application of adaptive higher-order vector finite element method to simulate resistivity logging-while-drilling tool response [J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2012,36(4):77-83.