文章编号:1673-5005(2013)02-0186-05 doi:10.3969/j.issn.1673-5005.2013.02.031

给定直径和悬挂点数的树的拉普拉斯系数

谭尚旺, 王奇龙

(中国石油大学 理学院,山东 青岛 266580)

摘要:令 $\varphi(T,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k(T)\lambda^{n-k}$ 是一个 n 点树 T 的拉普拉斯矩阵的特征多项式。熟知,$c_{n-2}(T)$ 和 $c_{n-3}(T)$ 分别等于 T 的维纳指标和修改超维纳指标。应用图的变换,确定给定直径和悬挂点数的树中所有拉普拉斯系数 $c_k(T)$ 最小的树。特别是确定了一些具有极端维纳指标、修改超维纳指标和 Laplacian-like 能量的树。

关键词: 拉普拉斯系数; 维纳指标; Laplacian-like 能量; 悬挂点

中图分类号: O 157.5 **文献标志码**:A

Laplacian coefficients of trees with given diameter and number of pendant vertices

TAN Shang-wang, WANG Qi-long

(*College of Science in China University of Petroleum*, *Qingdao* 266580, *China*)

Abstract: Let $\varphi(T,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k(T)\lambda^{n-k}$ be the characteristic polynomial of Laplacian matrix of a n-vertex tree T. It is well known that $c_{n-2}(T)$ and $c_{n-3}(T)$ are equal to the Wiener index and modified hyper-Wiener index of T, respectively. By applying some transformations of graphs, the trees with given diameter and number of pendant vertices were characterized which simultaneously minimize all Laplacian coefficients. In particular, some trees with extremal Wiener index, modified hyper-Wiener index and Laplacian-like energy were determined.

Key words: Laplacian coefficient; Wiener index; Laplacian-like energy; pendant vertex

1 问题的提出

本文讨论的图都是无环无重边的简单图。令 G 是一个具有 $n=|V(G)|$ 个顶点和 $e(G)$ 个边的图。用 $\boldsymbol{A}(G)$ 和 $\boldsymbol{D}(G)$ 分别表示 G 的邻接矩阵和顶点度对角矩阵,则矩阵 $\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{D}(G)-\boldsymbol{A}(G)$ 称为 G 的拉普拉斯矩阵,$\boldsymbol{L}(G)$ 的特征多项式 $\det(\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{L}(G))$ 称为 G 的拉普拉斯多项式,记为 $\varphi(G,\lambda)$。令 $c_k(G)(0\leqslant k\leqslant n)$ 表示 $\varphi(G,\lambda)$ 系数的绝对值,则

$$\varphi(G,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k(G)\lambda^{n-k}.$$

熟知,$c_0(G)=1$, $c_1(G)=2e(G)$, $c_{n-1}(G)=n\tau(G)$, $c_n(G)=0$,其中 $\tau(G)$ 是 G 的生成树的个数[1]。如果 G 是一个树,则 $c_{n-2}(G)$ 和 $c_{n-3}(G)$ 分别等于 G 的维纳指标和修改超维纳指标。关于系统内指标,超维纳指标和修改超维纳指标有关,结论见文献[2-5]。

令 G 和 H 是两个 n 点图。如果对所有的 $0\leqslant k\leqslant n$,都有 $c_k(G)\leqslant c_k(H)$,则记为 $G\preceq H$。如果 $G\preceq H$ 且存在某个 $0\leqslant k\leqslant n$,使得 $c_k(G)\neq c_k(H)$,则记为 $G\prec H$。

令 $S(G)$ 表示在 G 的每个边上插入一个新的 2 度点后得到的细分图,$m_k(G)$ 表示 G 恰好包含 k 个边的匹配的个数。对每个 n 点的无圈图 T,Zhou 和 Gutman[6] 已经证明

$$c_k(T)=m_k(S(T)),\ 0\leqslant k\leqslant n. \tag{1}$$

利用这个结论,Zhou 和 Gutman[6] 证明了 Gutman 和 Pavlović[7] 提出的一个猜想。

收稿日期:2012-08-05

基金项目:国家自然科学基金项目(10871204);中央高校基本科研业务费专项(09CX04003A)

作者简介:谭尚旺(1965-),男,教授,硕士,研究方向为图论。E-mail:tswang@sina.com。

定理1　令 P_n 和 S_n 分别表示具有 n 个顶点的路和星,T 是不同于 P_n 和 S_n 的任意 n 点树,则对所有的 $k=0,1,\cdots,n$,都有 $c_k(S_n)\leqslant c_k(T)\leqslant c_k(P_n)$。

借助式(1),已经得到了一些递减所有拉普拉斯系数的图的变换,并且也得到了很多关于树的拉普拉斯系数的结论。Mohar[8] 给出了两个树的变换,并且利用这两个变换给出了定理 1 的一个新的证明和加强。Zhang 等[9] 回答了 Mohar[10] 提出的用拉普拉斯系数定序树的一些问题,并且确定了偏序 $\preceq$ 下 n 点树的几个序。Ilić [11] 刻画了偏序 $\preceq$ 下给定直径的 n 点树的最小元。Ilić 等[12] 刻画了偏序 $\preceq$ 下给定悬挂点数或 2 度点数的树的最小元,特别是确定了 n 点树的第二个最小元和第二个最大元。Ilić [13] 确定了偏序 $\preceq$ 下给定匹配数的树的最小元。Lin 和 Yan[14] 刻画了偏序 $\preceq$ 下给定二部划分的树的最小元。

令 $\mu_n(G)\geqslant\mu_{n-1}(G)\geqslant\cdots\geqslant\mu_2(G)\geqslant\mu_1(G)=0$ 是 $\boldsymbol{L}(G)$ 的所有特征值。Liu 等[15] 定义 G 的 Laplacian-like 能量(简称为 LEL) 为 $LEL(G)=\sum\limits_{k=2}^{n}\sqrt{\mu_k(G)}$。已经证明 $LEL(G)$ 与 Gutman[16] 引进的分子图的能量有类似特征,其中分子图 G 的能量等于 $\boldsymbol{A}(G)$ 所有特征值绝对值的和。Stevanović [17] 给出了 Laplacian-like 能量和拉普拉斯系数之间的一个关系,Ilić 等[18] 给出了这个关系的一个校对证明。

定理2　令 G 和 H 是两个 n 点图。如果 $G\preceq H$,则 $LEL(G)\leqslant LEL(H)$;如果 $G\prec H$,则 $LEL(G)<LEL(H)$。

矩阵 $\boldsymbol{Q}(G)=\boldsymbol{D}(G)+\boldsymbol{A}(G)$ 称为 G 的无号拉普拉斯矩阵。熟知,$\boldsymbol{Q}(G)$ 有非负的特征值 $\nu_n(G)\geqslant\nu_{n-1}(G)\geqslant\cdots\geqslant\nu_2(G)\geqslant\nu_1(G)\geqslant 0$。Gutman 等[19-20] 引进了图 G 的关联能量 $IE(G)$,定义 $IE(G)=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\nu_k(G)}$。当 G 是一个二部图时,由于 $\boldsymbol{Q}(G)$ 和 $\boldsymbol{L}(G)$ 有相同的谱,于是 $IE(G)=LEL(G)$。

树的拉普拉斯系数涉及到树的维纳指标、修改超维纳指标、关联能量和 Laplacian-like 能量。

2　预备知识

对于图 G,令 $\mu(G)$ 表示 $\boldsymbol{L}(G)$ 的最大特征值,$d_G(v)$ 表示 G 的顶点 v 在 G 中的度。G 的 1 度顶点称为 G 的悬挂点,G 关联于悬挂点的边称为 G 的悬挂边。G 的一个路 $v_0v_1\cdots v_k$ 称为 G 在顶点 v_0 处长为 k 的悬挂路,如果它满足 $d_G(v_0)\geqslant 3$, $d_G(v_1)=d_G(v_2)=\cdots=d_G(v_{k-1})=2$, $d_G(v_k)=1$.

定义 1　令 w 是非平凡连通图 G 的一个顶点,$G(p,q)$ 表示分别在 w 处增加悬挂路 $wv_1v_2\cdots v_p$ 和 $wu_1u_2\cdots u_q$ 得到的图。如果 $p\geqslant q\geqslant 1$,则从 $G(p,q)$ 到 $G(p+1,q-1)$ 的过程称为 $G(p,q)$ 的一个 $\boldsymbol{\pi}$ 变换,而从 $G(p+1,q-1)$ 到 $G(p,q)$ 的过程称为 $G(p+1,q-1)$ 的一个 $\boldsymbol{\pi}^{-1}$ 变换。

引理 1[13]　如果 $p\geqslant q\geqslant 1$,则 $G(p,q)\preceq G(p+1,q-1)$。

引理 2　如果 G 是一个二部图并且 $p\geqslant q\geqslant 1$,则 $G(p,q)\prec G(p+1,q-1)$。

证明　既然 G 是二部连通图,于是 $\mu(G(p,q))>\mu(G(p+1,q-1))$[21],从而

$$\varphi(G(p,q),\lambda)\neq\varphi(G(p+1,q-1),\lambda).$$

这表明存在一个 $k(2\leqslant k\leqslant n-2)$,使得 $c_k(G(p,q))\neq c_k(G(p+1,q-1))$。故由引理 1 知结论成立。

连通图 G 中度大于 2 的顶点称为 G 的分枝点,G 中顶点 u 和 v 之间最短路的长度称为 u 和 v 之间的距离。G 的顶点 v 的离心率等于从 v 到其他所有顶点间距离的最大值。G 中具有最小离心率的顶点称为 G 的中心。树的中心是一个或两个邻接的顶点[2]。

定义 2　令 v 是树 T 的一个度为 $m+1$ 的顶点,记 v 的所有邻接点为 $u,v_1,v_2,\cdots,v_m$。假设 $H_1,H_2,\cdots,H_m$ 是关联 v 的所有悬挂路,其中 H_i 的起点是 v_i 并且长度 $n_i\geqslant 1\ (i=1,2,\cdots,m)$。令 $T'=\delta(T,v)$ 是从 T 中删除边 $vv_2,vv_3,\cdots,vv_m$,然后增加 $m-1$ 个新的边 $uv_2,uv_3,\cdots,uv_m$ 后得到的树。称 T' 是 T 从 v 到 u 关于 H_1 的一个 δ 变换,T 是 T' 从 u 到 v 关于 H_1 的一个 δ^{-1} 变换。显然,δ 变换保持树的悬挂点数不变。

引理 3[12]　令 T 是根在它的一个中心的 n 点树,v 是 T 中具有最大深度的一个分枝点,则对 δ 变换树 $T'=\delta(T,v)$,有 $T'\preceq T$。

定义 3　令 $vu_1u_2\cdots u_{s-1}u_s$ 是树 T 的一个路,满足:$d_T(v)\geqslant 3$, $d_T(u_1)=d_T(u_2)=\cdots=d_T(u_{s-1})=2$, $d_T(u_s)\geqslant 3$。除去 u_1 外,假设 v 的其他邻接点都在悬挂路上并且假设 $H=vv_1v_2\cdots v_t$ 就是一个在 v 处的悬挂路。令 T'' 是从 T 中删除边 vu_1,然后把 v 和 u_1 等同得到的树。令 T''' 是在 T'' 中增加新的悬挂边 $v_tu'_1$ 后得到的树。

一个具有唯一分枝点 v 的树称为关于根 v 的星状树。如果一个星状树关于根的所有悬挂路都有几乎相等的长度,则称它是平衡星状树。用 $S(n,s)$ 表

示有 n 个顶点和 s 个悬挂点的平衡星状树。令 $D(n,m,r)$ 表示在一个固定边 uv 的顶点 u 增加 m 个路 $uu_{i1}u_{i2}\cdots u_{it}(i=1,2,\cdots,m)$,而在顶点 v 增加 r 个路 $vv_{j1}v_{j2}\cdots v_{jt}(j=1,2,\cdots,r)$ 后得到的 n 点树,其中 $m+r=s$,并且 $mr\neq 0$。容易发现,$D(n,m,r)$ 有 $n=st+2$ 个点,s 个悬挂点和直径 $2t+1$。如果 d 是一个偶数,则记 $\varepsilon_d=0$,否则记 $\varepsilon_d=1$。

引理 4 令 T 是根在它的一个中心的 n 点树,v 是 T 中具有最大深度的一个分枝点,则对 δ 变换树 $T'=\delta(T,v)$,有 $T'<T$。

证明 由 δ 变换的定义知,T 至少有两个分枝点。令 u_s 是 T 中与 v 距离最小的一个分枝点,$vu_1u_2\cdots u_s$ 是 v 和 u_s 之间的唯一路,则 $T'''\cong T'=\delta(T,v)$。既然 T'' 是 $T'''\cong T'$ 的一个真子图,于是 $\mu(T')>\mu(T'')$[22]。另一方面,$\mu(T'')>\mu(T)$[23]。因此,$\mu(T')>\mu(T)$。这表明存在一个 $k(2\leqslant k\leqslant n-2)$,使得 $c_k(T')\neq c_k(T)$。于是由引理3得 $T'<T$。

引理 5 令 T 是具有 n 顶点,s 个悬挂点和直径 d 的任意树,则 $s(d-\varepsilon_d)\geqslant 2(n-1-\varepsilon_d)$。等式成立,当且仅当 d 是一个偶数时,$T\cong S(sd/2+1,s)$;d 是一个奇数时,存在整数 $m(1\leqslant m\leqslant s-1)$,使得 $T\cong D(s(d-1)/2+2,m,s-m)$。

证明 令 $P_{d+1}=u_1u_2\cdots u_du_{d+1}$ 是 T 的一个最长路,$v_1=u_1,v_2,\cdots,v_{s-1},v_s=u_{d+1}$ 是 T 的所有悬挂点。容易发现,T 的所有中心都在 P_{d+1} 上。

设 $d=2t$。此时,u_{t+1} 是 T 的唯一中心。令 H_i 是 T 中从 v_i 到 u_{t+1} 的唯一路,$i=1,2,\cdots,s$,则 $V(T)=\{u_{t+1}\}\cup\left(\bigcup_{i=1}^{s}V(H_i-u_{t+1})\right)$。由中心的定义知 $|V(H_i-u_{t+1})|\leqslant t$。因此,

$$n=1+\left|\bigcup_{i=1}^{s}V(H_i-u_{t+1})\right|\leqslant 1+\sum_{i=1}^{s}|V(H_i-u_{t+1})|\leqslant 1+st. \tag{2}$$

于是 $sd\geqslant 2(n-1)$。由式(2)知 $sd=2(n-1)$,当且仅当

$|V(H_i-u_{t+1})|=t,\ 1\leqslant i\leqslant s,$

$V(H_i-u_{t+1})\cap V(H_j-u_{t+1})=\varnothing,\ 1\leqslant i\neq j\leqslant s.$

这些等价于 $T\cong S(sd/2+1,s)$。

设 $d=2t+1$。此时,u_{t+1} 和 u_{t+2} 是 T 的两个中心。令 $T(u_{t+1})$ 和 $T(u_{t+2})$ 分别表示 $T-u_{t+1}u_{t+2}$ 中包含 u_{t+1} 和 u_{t+2} 的两个分支。不失一般性,假设 $v_1,v_2,\cdots,v_m\in V(T(u_{t+1}))$, $v_{m+1},v_{m+2},\cdots,v_s\in V(T(u_{t+2}))$。令 H_i 是 $T(u_{t+1})$ 中从 v_i 到 u_{t+1} 的唯一路$(i=1,2,\cdots,m)$,W_i 是 $T(u_{t+2})$ 中从 v_{m+i} 到 u_{t+2} 的唯一路$(i=1,2,\cdots,s-m)$,则 $V(T)=\{u_{t+1},u_{t+2}\}\cup\left(\bigcup_{i=1}^{m}V(H_i-u_{t+1})\right)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{s-m}V(W_i-u_{t+2})\right)$。由中心的定义知

$$|V(H_i-u_{t+1})|\leqslant t,\ 1\leqslant i\leqslant m;$$

$$|V(W_i-u_{t+2})|\leqslant t,\ 1\leqslant i\leqslant s-m.$$

因此,

$$n=2+\left|\bigcup_{i=1}^{s}V(H_i-u_{t+1})\right|+\left|\bigcup_{i=1}^{s-m}V(W_i-u_{t+2})\right|\leqslant 2+\sum_{i=1}^{s}|V(H_i-u_{t+1})|+\sum_{i=1}^{s-m}|V(W_i-u_{t+2})|\leqslant 2+st. \tag{3}$$

这就得到 $s(d-1)\geqslant 2(n-2)$。由式(3)知 $s(d-1)=2(n-2)$,当且仅当

$|V(H_i-u_{t+1})|=t,\ 1\leqslant i\leqslant m,$

$|V(W_i-u_{t+2})|=t,\ 1\leqslant i\leqslant s-m,$

$V(H_i-u_{t+1})\cap V(H_j-u_{t+1})=\varnothing,\ 1\leqslant i\neq j\leqslant m,$

$V(W_i-u_{t+2})\cap V(W_j-u_{t+2})=\varnothing,\ 1\leqslant i\neq j\leqslant s-m.$

这些等价于 $T\cong D(s(d-1)/2+2,m,s-m)$。

令 n,d,s 是满足 $s(d-\varepsilon_d)\geqslant 2(n-1-\varepsilon_d)$ 且 $3\leqslant s\leqslant n-d+1$ 的三个正整数。设

$$n-d-1=p(s-2)+q,\quad 0\leqslant q\leqslant s-3. \tag{4}$$

令 $T_{n,d,s}$ 表示在路 $P_{d+1}=123\cdots d(d+1)$ 的顶点 r 上分别增加 q 个长为 $p+1$ 的悬挂路和 t 个长为 p 的悬挂路得到的星状树(图1),其中 $r=r(d)=\left\lceil\frac{d+1}{2}\right\rceil$ 且 $t+q=s-2$。

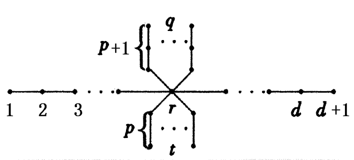

图 1 一个特殊星状树

Fig. 1 A special starlike tree

引理 6 如果 n,d,s 是满足 $s(d-\varepsilon_d)\geqslant 2(n-1-\varepsilon_d)$ 且 $3\leqslant s\leqslant n-d+1$ 的正整数,则 $T_{n,d,s}$ 具有 n 个顶点,s 个悬挂点和直径 d。

证明 由定义知,$T_{n,d,s}$ 有 s 个悬挂点,并且它的顶点数等于

$$d+1+(p+1)q+pt=d+1+p(q+t)+q=d+1+p(s-2)+q=n.$$

从 $s\geqslant 3$,式(4)和 $s(d-\varepsilon_d)\geqslant 2(n-1-\varepsilon_d)$ 得到

$$p=\frac{n-d-1-q}{s-2}\leqslant\frac{1}{s-2}\left[\frac{s(d-\varepsilon_d)}{2}+\varepsilon_d-d-q\right]=\frac{d-\varepsilon_d}{2}-\frac{q}{s-2}=r-1-\frac{q}{s-2}.$$

如果 $q=0$,则 $p\leqslant r-1$,即 $p+1\leqslant r$。如果 $q\neq 0$,则 $p\leqslant r-2$,即 $p+2\leqslant r$。因此,$T_{n,d,s}$ 的直径总是 d。

3　主要结论及其证明

定理 3　在所有具有 n 个顶点,s 个悬挂点和直径 d 的树中,$T_{n,d,s}$ 是偏序关系 $\preceq$ 下的唯一最小元。

证明　由于路 P_n 和星 S_n 分别是有 2 个悬挂点和 $n-1$ 个悬挂点的唯一树,于是下面假设 $3\leqslant s\leqslant n-d+1\leqslant n-2$。由引理 5 和引理 6 知,$T_{n,d,s}$ 是具有 n 个顶点,s 个悬挂点和直径 d 的树。令 $T\not\cong T_{n,d,s}$ 是任意一个具有 n 个顶点,s 个悬挂点和直径 d 的树,$P_{d+1}=123\cdots d(d+1)$ 是 T 的一个最长路,则 T 的中心都在 P_{d+1} 上。选择一个中心作为 T 的根,用 $\theta(T)$ 表示 T 的分枝点个数。显然,$\theta(T)\geqslant 1$。下面只需证明 $T_{n,d,s}\prec T$ 即可。

情形 1　假设 $\theta(T)=1$。此时,T 是一个星状树。保持 P_{d+1} 不变,通过应用 π^{-1} 变换至少一次,T 能被变换成 $T_{n,d,s}$。由引理 2 得到 $T_{n,d,s}\prec T$。

情形 2　假设 $\theta(T)\geqslant 2$。再划分成两种情形。

情形 2.1　假设 T 的所有分枝点都在 P_{d+1} 上。选择一个与 T 的根有最大距离的分枝点 v。令 w 是 v 在 P_{d+1} 上介于 v 和 T 的根之间的邻接点,H_1 是 P_{d+1} 上关联于 v 的悬挂路。通过应用从 v 到 w 关于 H_1 的一个 δ 变换,T 能变换成一个具有 n 个顶点,s 个悬挂点和直径 d 的新的树 T_1。显然,$\theta(T_1)\leqslant\theta(T)$。如果 $\theta(T_1)\geqslant 2$,则对 T_1 重复上面过程,直到得到一个树 T_r 为止,其中 $\theta(T_r)=1$。于是得到有 n 个顶点,s 个悬挂点和直径 d 的树的序列 $T,T_1,T_2,\cdots,T_r(r\geqslant 1)$。因此,由情形 1 的结论和引理 4 得到 $T_{n,d,s}\preceq T_r\prec\cdots\prec T_1\prec T$.

情形 2.2　假设 T 至少有一个分枝点不在 P_{d+1} 上。令 v 是不在 P_{d+1} 上具有最大深度的一个分枝点,$P=vuu'\cdots$ 是从 v 到 T 的根的唯一路。由 v 的假设知,除去 u 外,v 的其他所有邻接点都在长度至少是 1 的悬挂路上。令 H_1 是关联于 v 的任意一个悬挂路。通过应用从 v 到 u 关于 H_1 的一个 δ 变换,T 能变换成一个有 n 个顶点、s 个悬挂点和直径 d 的树 G_1。显然,$\theta(G_1)\leqslant\theta(T)$。容易发现,$u$ 是 G_1 的一个分枝点并且它的深度比 v 在 T 中的深度小。如果 G_1 仍然存在分枝点不在 P_{d+1} 上,则对 G_1 重复上面过程,直到得到一个树 G_m 为止,其中 G_m 的分枝点都在 P_{d+1} 上。于是得到有 n 个顶点,s 个悬挂点和直径 d 的树的序列 $T,G_1,G_2,\cdots,G_m(m\geqslant 1)$。由引理 4 知 $G_m\prec\cdots\prec G_1\prec T$。既然 G_m 满足情形 2.1 的条件,于是由情形 2.1 的结论得 $T_{n,d,s}\preceq G_m\prec T$。

推论 1　在所有具有 n 个顶点,s 个悬挂点和直径 d 的树中,$T_{n,d,s}$ 是分别具有最小维纳指标、修改超维纳指标和 $LEL(=IE)$ 的唯一树。

推论 2[12]　在所有具有 n 个顶点和 s 个悬挂点的树中,$S(n,s)$ 是偏序关系 $\preceq$ 下的唯一最小元。

证明　令 $T\not\cong S(n,s)$ 是任意一个具有 n 个顶点和 s 个悬挂点的树,并且记 T 的直径为 d。如果 $T\not\cong T_{n,d,s}$,则由定理 3 得

$$T_{n,d,s}\prec T.\tag{5}$$

如果 $T_{n,d,s}\not\cong S(n,s)$,则在 $T_{n,d,s}$ 的最长悬挂路和最短悬挂路之间反复应用 π^{-1} 变换,直到所有悬挂路的长度变成几乎相等为止。最后得到的树为 $S(n,s)$,于是由引理 2 知

$$S(n,s)\prec T_{n,d,s}.\tag{6}$$

由式(5)和(6),推论得证。

推论 3[11]　在所有具有 n 个顶点和直径 d 的树中,$T_{n,d,n-d+1}$ 是偏序关系 $\preceq$ 下的唯一最小元。

证明　令 $T\not\cong T_{n,d,n-d+1}$ 是任意一个具有 n 个顶点和直径为 d 的树,并且记 T 的悬挂点数为 s。如果 $T\not\cong T_{n,d,s}$,则由定理 3 得

$$T_{n,d,s}\prec T.\tag{7}$$

令 P_{d+1} 是 $T_{n,d,s}$ 的一个最长路。如果 $T_{n,d,s}\not\cong T_{n,d,n-d+1}$,则对不在 P_{d+1} 上的 $T_{n,d,s}$ 的悬挂路反复应用 π^{-1} 变换,直到这些悬挂路都变成悬挂边为止。最后得到的树为 $T_{n,d,n-d+1}$,于是由引理 2 知

$$T_{n,d,n-d+1}\prec T_{n,d,s}.\tag{8}$$

由式(7)和(8),推论得证。

引理 7　如果 $2\leqslant s\leqslant n-2$,则 $S(n,s+1)\prec S(n,s)$。

证明　如果 $s=2$,则令 w 是 $S(n,s)$ 的任意一个中心;否则令 w 是 $S(n,s)$ 的唯一分枝点。假设 P 是一个端点为 w 而另一个端点是悬挂点的最长路,记 P 的悬挂点为 v。令 $T=S(n,s)-v+wv$,则 T 是一个具有 n 个顶点和 $s+1$ 个悬挂点的树。由推论 2 和引理 2 得 $S(n,s+1)\preceq T\prec S(n,s)$。

令 $A_{s,t}$ 表示在星图 S_{t+1} 的中心增加 s 个长为 2 的悬挂路得到的树。对一个 n 点树 T,令 α 和 α' 分别表示 T 的独立数和匹配数。熟知,$\alpha+\alpha'=n$。注意到 $\alpha'\leqslant n/2$,于是 $\alpha\geqslant n/2$。

设 $G=(V,E)$ 是一个简单图,B 是 $V\cup E$ 的一个子集。如果 B 的任两个元素既不邻接,也不关联,则称 B 为 G 的一个全独立集。元素个数最多的全独立

集称为 G 的最大全独立集,并且最大全独立集的元素数称为 G 的全独立数,记为 γ。

定理4 在所有具有 n 个顶点和全独立数为 γ 的树中,$A_{n-\gamma-1,2\gamma-n+1}$ 是偏序关系 $\preceq$ 下的唯一最小元。

证明 令 $T\not\cong A_{n-\gamma-1,2\gamma-n+1}$ 是任意一个具有 n 个顶点和全独立数为 γ 的树。记 T 的悬挂点数为 s。既然 T 的所有悬挂点构成 T 的一个独立集并且 T 的独立集一定是 T 的全独立集,于是 $s\leqslant\alpha\leqslant\gamma$。注意到 $\alpha\geqslant n/2$,于是 $\gamma\geqslant n/2$。既然 $S(n,\gamma)$ 的所有悬挂路具有几乎相等的长度,于是由 $\gamma\geqslant n/2$ 知 $S(n,\gamma)$ 的所有悬挂路的长度不超过2。令 x 和 y 分别是 $S(n,\gamma)$ 中长为2 和长为1 的悬挂路的个数,则 $2x+1+y=n, x+y=\gamma$。容易发现 $x=n-\gamma-1, y=2\gamma-n+1$。于是 $S(n,\gamma)=A_{n-\gamma-1,2\gamma-n+1}$。因此,由 $s\leqslant\gamma$,引理7 和推论2,有

$$c_k(A_{n-\gamma-1,2\gamma-n+1})=c_k(S(n,\gamma))\leqslant c_k(S(n,s))\leqslant c_k(T),\ k=0,1,2,\cdots,n,$$

并且由 $T\not\cong A_{n-\gamma-1,2\gamma-n+1}$ 知,对某个 $k(2\leqslant k\leqslant n-2)$,上面至少一个不等式是严格的。因此,定理得证。

推论4 在所有具有 n 个顶点和全独立数为 γ 的树中,$A_{n-\gamma-1,2\gamma-n+1}$ 是分别具有最小维纳指标、修改超维纳指标和 $LEL(=IE)$ 的唯一树。

参考文献:

[1] MERRIS R. A survey of graph Laplacians [J]. Linear and Multilinear Algebra, 1995,39:19-31.

[2] DOBRYNIN A, ENTRINGER R, GUTMAN I. Wiener index of trees: theory and applications [J]. Acta Appl Math, 2001,66:211-249.

[3] RANDIĆ M. Novel molecular descriptor for structure-property studies [J]. Chem Phys Lett, 1993,211:478-83.

[4] GUTMAN I. A property of the Wiener number and its modifications [J]. Indian J Chem, 1997,36A:128-132.

[5] GUTMAN I, FURTULA B, BELIĆ J. Note on the hyper-Wiener index [J]. J Serb Chem Soc, 2003,68:943-948.

[6] ZHOU B, GUTMAN I. A connection between ordinary and Laplacian spectra of bipartite graphs [J]. Linear and Multilinear Algebra, 2008,56:305-310.

[7] GUTMAN I, PAVLOVIĆ L. On the coefficients of the Laplacian characteristic polynomial of trees [J]. Bull Acad Serbe Sci Arts, 2003,127:31-40.

[8] MOHAR B. On the Laplacian coefficients of acyclic graphs [J]. Linear Algebra Appl, 2007,722:736-741.

[9] ZHANG X D, LÜ X P, CHEN Y H. Ordering trees by the Laplacian coefficients [J]. Linear Algebra Appl, 2009,431:2414-2424.

[10] MOHAR B. Problems: Laplacian coefficients of trees [EB/OL]. http://www. fmf. uni-lj. si/ ~ mohar/, September, 2006.

[11] ILIĆ A. On the ordering of trees by the Laplacian coefficients [J]. Linear Algebra Appl, 2009, 431: 2203-2212.

[12] ILIĆ A, ILIĆ M. Laplacian coefficients of trees with given number of leaves or vertices of degree two [J]. Linear Algebra Appl, 2009,431:2195-2202.

[13] ILIĆ A. Trees with minimal Laplacian coefficients [J]. Comp Math Appl, 2010,59:2776-2783.

[14] LIN W, YAN W G. Laplacian coefficients of trees with a given bipartition [J]. Linear Algebra Appl, 2011, 435:152-162.

[15] LIU J, LIU B. A Laplacian-energy-like invariant of a graph [J]. Match Commun Math Comput Chem, 2008, 59:397-419.

[16] GUTMAN I. The energy of a graph [J]. Ber Math Statist Sekt Forschungsz Graz, 1978, 103: 1-22.

[17] STEVANOVIĆ D. Laplacian-like energy of trees [J]. Match Commun Math Comput Chem, 2009, 61: 407-417.

[18] ILIĆ A, KRTINIĆ Dj, ILIĆ M. On Laplacian-like energy of trees [J]. Match Commun Math Comput Chem, 2010,64:111-122.

[19] GUTMAN I, KIANI D, MIRZAKHAH M. On incidence energy of graphs [J]. Match Commun Math Comput Chem, 2009,62:573-580.

[20] JOOYANDEH M R, KIANI D, MIRZAKHAH M. Incidence energy of a graph [J]. Match Commun Math Comput Chem, 2009,62:561-572.

[21] TAN S W, WANG X K. On the largest eigenvalue of signless Laplacian matrix of a graph [J]. J Math Res Exposition, 2009,29:381-390.

[22] GUO J M. On the Laplacian spectral radius of a tree [J]. Linear Algebra Appl, 2003,868:379-385.

[23] 袁西英, 吴宝丰, 肖恩利. 树的运算及其 Laplace 谱 [J]. 华东师范大学学报:自然科学版, 2004,2:13-18.

YUAN Xi-ying, WU Bao-feng, XIAO En-li. Modifications of trees and the Laplacian spectrum [J]. J East China Normal University (Natural Science), 2004,2: 13-18.

(编辑 修荣荣)