

文章编号:1673-5005(2011)01-0179-05

一阶差分方程周期边值问题一个或多个正解的存在性

许晓婕, 费祥历

(中国石油大学 数学与计算科学学院, 山东 东营 257061)

摘要:用一类锥不动点定理首先给出一阶差分周期边值问题的存在性原则,并应用此原则论证了该问题一个或多个正解的存在性,最后通过例证对该问题加以说明。

关键词:周期边值问题;差分方程;正解;锥不动点定理

中图分类号:O 175. 08 **文献标志码:**A **doi:**10. 3969/j. issn. 1673-5005. 2011. 01. 036

Existence of single and multiple solutions for first order discrete periodic boundary value problems

XU Xiao-jie, FEI Xiang-li

(College of Mathematics and Computational Science in China University of Petroleum, Dongying 257061, China)

Abstract: The existence principle of single and multiple positive solutions for the first order discrete periodic boundary value problems was studied by employing a fixed point theorem in cones. Based on this principle, the existence of single and multiple positive solutions for the problems was given. Some new results about nonlinear difference equations on a finite discrete segment with periodic boundary conditions were demonstrated.

Key words: periodic boundary value problem; discrete equation; positive solution; fixed point theorem in cones

1 问题的提出

本文主要研究一阶差分周期边值问题

$$\begin{cases} \Delta y(n) + a(n)y(n) = f(n, y(n)), n \in [1, N], \\ y(1) = y(N+1) \end{cases} \quad (1)$$

一个或多个正解的存在性,其中 $\{y(n)\}_{n=1}^{N+1}$ 是想得到的一个解。通常 Δ 表示向前差分,定义如下:

$$\Delta y(n) = y(n+1) - y(n),$$

并且整数 $a \leq b$, $[a, b]$ 表示离散区间 $\{a, a+1, \dots, b\}$ 。

常微分方程的初值和周期边值问题已被广泛地研究^[1-4],研究者主要是用上下解方法得出解的存在性结果。最近,关于一阶微分方程初值问题又有了些新的结论^[4-7]。但是,关于一阶差分周期边值问题却很少有人研究。笔者应用锥不动点定理^[8]给出一些新的条件,确保问题(1)解的存在性。类似于文

献[9,10]的方法,证明一阶差分周期边值问题正解的存在性。

2 引理及定理

考虑线性周期问题

$$\begin{cases} \Delta y(n) + a(n)y(n) = 0, n \in [1, N], \\ y(1) = y(N+1). \end{cases} \quad (2)$$

贯穿全文,假设问题(2)只有平凡解。显然非其次问题

$$\begin{cases} \Delta y(n) + a(n)y(n) = h(n), n \in [1, N], \\ y(1) = y(N+1) \end{cases} \quad (3)$$

只有一个唯一解 $\{y(n)\}_{n=1}^{N+1}$,即

$$y(n) = \sum_{s=1}^N G(n, s)h(s), n \in [1, N+1],$$

其中

收稿日期:2010-01-12

基金项目:中国石油大学(华东)基础科研基金(Y070815)

作者简介:许晓婕(1977-),女(汉族),辽宁凤城人,讲师,博士研究生,从事微分方程理论及应用研究。

$$G(n,s) = \begin{cases} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} [1-a(i)] \prod_{i=s+1}^N [1-a(i)]}{1 - \prod_{i=1}^N [1-a(i)]}, \\ 1 \leq n \leq s < N+1, \\ \frac{\prod_{i=s+1}^{n-1} [1-a(i)]}{1 - \prod_{i=1}^N [1-a(i)]}, 1 \leq s < n \leq N+1. \end{cases}$$

注1 为了讨论问题方便,对任意的 $n \in [1, N]$, 定义符号 $\prod_{i=n}^{n-1} [1-a(i)] = 1$. 从解的表达式中很容易看出:

引理1 如果当 $n \in [1, N]$ 时, $0 < a(n) < 1$, 则对任意的 $(n, s) \in [1, N] \times [1, N]$, $G(n, s) > 0$.

为了方便,本文中令

$$M = \max_{1 \leq n, s \leq N} G(n, s), N = \min_{1 \leq n, s \leq N} G(n, s).$$

下面给出锥不动点定理^[2].

定理1 $X = (X, \|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间, K 是 X 中的一个锥,并且两个常数 r 和 R 满足 $0 < r < R$. 假设 $\Phi: \bar{E}_R \cap K \rightarrow K$ (这里 $\bar{E}_R = \{x \in X, \|x\| < R\}$) 是一个全连续映射,如果

(i) 当 $\lambda \in [0, 1]$ 且 $x \in K \cap \partial \bar{E}_r$ 时, $x \neq \lambda \Phi x$,

(ii) 当 $x \in K \cap \partial \bar{E}_R$ 且 $\delta > 0$ 时, 存在 $\psi \in K \setminus \{0\}$ 使得 $x \neq \Phi x + \delta \psi$,

则 Φ 在 $K \cap \{x \in X; r < \|x\| < R\}$ 中有一个不动点.

注2 在定理1中,如果 (i) 和 (ii) 用下面两个条件替换:

(i)* 当 $\lambda \in [0, 1]$ 且 $x \in K \cap \partial \bar{E}_R$ 时, $x \neq \lambda \Phi x$,

(ii)* 当 $x \in K \cap \partial \bar{E}_r$ 且 $\delta > 0$ 时, 存在 $\psi \in K \setminus \{0\}$ 使得 $x \neq \Phi x + \delta \psi$,

则 Φ 在 $K \cap \{x \in X; r < \|x\| < R\}$ 中有一个不动点.

3 主要结果

考虑如下周期边值问题:

$$\begin{cases} \Delta y(n) = f(n, y(n)), n \in [1, N], \\ y(1) = y(N+1). \end{cases} \quad (4)$$

函数 $f(n, \xi)$ 满足 $f: [1, N] \times R \rightarrow R$ 关于 ξ 连续.

注3 称映射 $f: [1, N] \times R \rightarrow R$ 连续是指从拓扑空间 $[1, N] \times R$ 到拓扑空间 R 上的连续. 全文中拓扑空间 $[1, N]$ 指的是离散拓扑.

定理2 假设存在 $a(n) \in (0, 1)$ 和 $0 < r < R$

使得

$$f(n, y(n)) + a(n)y(n) \geq 0, \forall y \in \left[\frac{m}{M}r, R\right], n \in [1, N].$$

如果下面两个条件之一成立:

$$(i) f(n, y(n)) \geq 0, \forall y \in \left[\frac{m}{M}r, r\right], n \in [1, N],$$

$N]$,

$$f(n, y(n)) \leq 0, \forall y \in \left[\frac{m}{M}R, R\right], n \in [1, N],$$

$$(ii) f(n, y(n)) \leq 0, \forall y \in \left[\frac{m}{M}r, r\right], n \in [1, N],$$

$$f(n, y(n)) \geq 0, \forall y \in \left[\frac{m}{M}R, R\right], n \in [1, N],$$

则问题(4)至少有一个正解.

证明 由于 $M > m > 0$, 改写方程如下:

$$\Delta y(n) + a(n)y(n) = f(n, y(n)) + a(n)y(n).$$

考虑 N -维 Banach 空间,

$$B = \{y: [1, N+1] \rightarrow R \mid y(1) = y(N+1)\},$$

赋予范数

$$\|y\| = \max_{n \in [1, N]} |y(n)|, n \in [1, N].$$

令

$$K = \left\{y \in B \mid \min_{n \in [1, N]} y(n) \geq \frac{m}{M} \|y\|\right\}, \quad (5)$$

易证 K 是 B 中的一个锥.

当 $y \in B$ 时, 定义映射 Φ

$$(\Phi y)(n) = \sum_{s=1}^N G(n, s) [f(s, y(s)) + a(s)y(s)]. \quad (6)$$

显然, Φ 是 B 上一个全连续映射 (详见参考文献 [11]). 下面证明 $\Phi(K) \subset K$.

事实上, 对任意的 $y \in K$ 有

$$\|\Phi y\| \leq M \sum_{s=1}^N [f(s, x(s)) + a(s)x(s)],$$

且

$$(\Phi y)(n) \geq m \sum_{s=1}^N [f(s, x(s)) + a(s)x(s)],$$

所以有

$$(\Phi y)(n) \geq \frac{m}{M} \|\Phi y\|, \Phi y \in K.$$

因此, $\Phi(K) \subset K$.

首先假设条件 (i) 成立, 证明问题 (4) 至少有一个解.

由第一个不等式可得

$$f(n, y(n)) + a(n)y(n) \geq a(n)y(n),$$

$$\forall y \in \left[\frac{m}{M}r, R \right], n \in [1, N].$$

令 $\psi \equiv 1$, 则 $\psi \in K$ 。下面证明

$$\text{对 } \forall y \in K \cap \partial\Omega_r \text{ 和 } \delta > 0, y \neq \Phi y + \delta\psi. \quad (7)$$

假设式(7)不成立, 则存在 $y_0 \in K \cap \partial\Omega_r$ 和 $\delta > 0$ 使得

$$y_0 = \Phi y_0 + \delta_0 \psi.$$

注意到 $y(n) \equiv 1$ 是边值问题(3)当 $h(n) = a(n)$ 时的唯一解, 则 $\sum_{s=1}^N G(n, s)a(s) = 1$ 。

$$\text{因为 } y_0 \in K \cap \partial\Omega_r, \text{ 则 } y_0(n) \geq \frac{m}{M} \|y_0\| =$$

$$\frac{m}{M} \|y_0\| = \frac{m}{M} r. \text{ 令 } \mu = \min_{s \in [1, N]} y_0(s), \text{ 则对任意的 } n \in [1, N], \text{ 有}$$

$$y_0(n) = (\Phi y_0)(n) + \delta_0 = \sum_{s=1}^N G(n, s)[f(s, y_0(s)) + a(s)y_0(s)] + \delta_0 \geq \sum_{s=1}^N G(n, s)a(s)y_0(s) + \delta_0 \geq$$

$$\mu \sum_{s=1}^N G(n, s)a(s) + \delta_0 = \mu + \delta_0.$$

这表明 $\mu \geq \mu + \delta_0$, 矛盾。因此式(7)成立。

另一方面, 由第二个不等式可得

$$f(n, y(n)) + a(n)y(n) \leq a(n)y(n),$$

$$\forall y \in \left[\frac{m}{M}R, R \right], n \in [1, N].$$

则可证

$$\text{对任意的 } y \in K \cap \partial\Omega_R \text{ 和 } 0 \leq \lambda \leq 1, y \neq \lambda\Phi y. \quad (8)$$

如果式(8)不成立, 则存在 $y_0 \in K \cap \partial\Omega_R$ 和 $0 \leq \lambda_0 \leq 1$, 使得

$$y_0 = \lambda_0 \Phi y_0.$$

显然, $\lambda_0 > 0, \|y_0\| = R$ 。如果 $\lambda_0 = 1$, 则 $y_0 = \Phi y_0$, y_0 就是边值问题(4)的一个解, 所以只须考虑 $\lambda_0 < 1$ 。因此对任意的 $n \in [1, N]$, 有

$$(\Phi y_0)(n) = \lambda_0 \sum_{s=1}^N G(n, s)[f(s, y_0(s)) + a(s)y_0(s)] < \sum_{s=1}^N G(n, s)a(s)y_0(s) \leq$$

$$\sum_{s=1}^N G(n, s)a(s) \max_{n \in [1, N]} y_0(n) = R.$$

因此, $\|y_0\| = R < R$, 矛盾。

式(7)和(8)表明注1成立, 则 Φ 有一个不动点 $y \in K \cap (\bar{E}_R \setminus \Omega_r)$ 。显然, 这个不动点就是问题

(4)的一个正解, 且满足 $r \leq \|y\| \leq R$ 。

应用类似的方法可以证明当条件(ii)成立时, 由定理1也可以得出相应的结论。

由定理2可以直接得出下面的几个结论。

定理3 假设存在 $a(n) \in (0, 1)$ 和 $0 < r < p < R$ 使得

$$f(n, y(n)) + a(n)y(n) \geq 0, \forall y \in \left[\frac{m}{M}r, R \right], n \in [1, N].$$

如果下面两个条件之一成立:

$$(i) f(n, y(n)) \geq 0, \forall y \in \left[\frac{m}{M}r, r \right], n \in [1, N],$$

$$f(n, y(n)) < 0, \forall y \in \left[\frac{m}{M}p, p \right], n \in [1, N],$$

$$f(n, y(n)) \geq 0, \forall y \in \left[\frac{m}{M}R, R \right], n \in [1, N],$$

$$(ii) f(n, y(n)) \leq 0, \forall y \in \left[\frac{m}{M}r, r \right], n \in [1, N],$$

$$f(n, y(n)) > 0, \forall y \in \left[\frac{m}{M}p, p \right], n \in [1, N],$$

$$f(n, y(n)) \leq 0, \forall y \in \left[\frac{m}{M}R, R \right], n \in [1, N],$$

则问题(4)至少存在两个正解 y_1, y_2 满足 $r \leq \|y_1\| < p < \|y_2\| \leq R$ 。

证明 只证明条件(i)成立的情况, 条件(ii)成立的情况类似可得。完全类似定理2的证明, 有对 $\forall y \in K \cap \partial\Omega_r$ 和 $\delta > 0, y \neq \Phi y + \delta\psi$, (9) 对 $\forall y \in K \cap \partial\Omega_R$ 和 $\delta > 0, y \neq \Phi y + \delta\psi$, (10) 对 $\forall y \in K \cap \partial\Omega_p$ 和 $0 \leq \lambda \leq 1, y \neq \lambda\Phi y$, (11) 因此由定理1和注1可分别求得方程至少存在两个正解 y_1, y_2 , 并且由式(11)易知 $r \leq \|y_1\| < p < \|y_2\| \leq R$ 。

定理4 假设存在 $a(n) \in (0, 1)$ 和 $0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n$ 使得

$$f(n, y(n)) + a(n)y(n) \geq 0, \forall y \in \left[\frac{m}{M}a_i, b_n \right], n \in [1, N].$$

如果下面两个条件之一成立:

$$(i) f(n, y(n)) \geq 0, \forall y \in \left[\frac{m}{M}a_i, a_i \right], n \in [1, N], 1 \leq i \leq n,$$

$$f(n, y(n)) \leq 0, \forall y \in \left[\frac{m}{M}b_i, b_i \right], n \in [1, N], 1 \leq i \leq n,$$

(ii) $f(n, y(n)) \leq 0, \forall y \in \left[\frac{m}{M}a_i, a_i\right], n \in [1, N], 1 \leq i \leq n,$

$f(n, y(n)) \geq 0, \forall y \in \left[\frac{m}{M}b_i, b_i\right], n \in [1, N],$

$1 \leq i \leq n,$

则问题(4)至少存在 n 重正解 $y_i (1 \leq i \leq n)$ 满足 $a_i \leq \|y_i\| \leq b_i, 1 \leq i \leq n.$

注4 在定理4中,如果条件(i)和(ii)替换成下面两个条件:

(i)* $f(n, y(n)) > 0, \forall y \in \left[\frac{m}{M}a_i, a_i\right], n \in [1, N], 1 \leq i \leq n,$

$f(n, y(n)) < 0, \forall y \in \left[\frac{m}{M}b_i, b_i\right], n \in [1, N],$

$1 \leq i \leq n,$

(ii)* $f(n, y(n)) < 0, \forall y \in \left[\frac{m}{M}a_i, a_i\right], n \in [1, N], 1 \leq i \leq n,$

$f(n, y(n)) > 0, \forall y \in \left[\frac{m}{M}b_i, b_i\right], n \in [1, N],$

$1 \leq i \leq n,$

则方程(4)至少存在 $2n - 1$ 重正解。

4 应用

假设函数 $f(n, \xi)$ 满足 $f: [1, N] \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 关于 ξ 连续。需要说明的是在求解周期边值问题正解的存在性时并不需要知道 m, M 的确切数值。

考虑周期边值问题

$$\begin{cases} \Delta y(n) + a(n)y(n) = f(n, y(n)), n \in [1, N], \\ y(1) = y(N+1). \end{cases} \quad (12)$$

其中 $0 < a(n) < 1.$

为了叙述方便,引入下面的符号:

$$f_0 = \min_{n \in [1, N]} \liminf_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{f(n, \xi)}{a(n)\xi}, f^0 = \max_{n \in [1, N]} \limsup_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{f(n, \xi)}{a(n)\xi},$$

$$f_\infty = \min_{n \in [1, N]} \liminf_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{f(n, \xi)}{a(n)\xi}, f^\infty = \max_{n \in [1, N]} \limsup_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{f(n, \xi)}{a(n)\xi}.$$

本节还需假设下面一些条件成立:

(H₁) $f_0 > 1, f_\infty > 1;$

(H₂) $f^0 < 1, f^\infty < 1;$

(H₃) 存在一个 $p > 0$,只要 $\frac{m}{M}p \leq \xi \leq p$,就有

对任意的 $n \in [1, N], f(n, \xi) < a(n)p;$

(H₄) 存在一个 $p > 0$,只要 $\frac{m}{M}p \leq \xi \leq p$,就有对任意的 $n \in [1, N], f(n, \xi) > a(n)\xi.$

注5 存在一个 $p > 0$,只要 $\frac{m}{M}p \leq \xi \leq p$,就有对任意的 $n \in [1, N], f(n, \xi) < a(n)\xi, (H_3)$ 成立。

注6 存在一个 $p > 0$,只要 $\frac{m}{M}p \leq \xi \leq p$,就有对任意的 $n \in [1, N], f(n, \xi) > a(n)p, (H_4)$ 成立。

定理5 假设(H₁)和(H₃)成立,则边值问题(12)至少有两个正解 $y_1 = \{y_1(n)\}_{n=1}^{N+1}$ 和 $y_2 = \{y_2(n)\}_{n=1}^{N+1}$ 使得 $0 < \|y_1\| < p < \|y_2\|$ 且对任意的 $n \in [1, N], 0 < y_1(n) < p < y_2(n).$

证明 分别取 r 充分小和 R 充分大,则由定理3直接可得定理5。特别地,有下面的结论:

推论1 由下面的条件

(H₁*) $f_0 = \infty, f_\infty = \infty$

替换(H₁),定理5的结论仍然成立。

定理6 假设(H₂)和(H₄)成立,则边值问题(12)至少存在两个解 $y_1 = \{y_1(n)\}_{n=1}^{N+1}$ 和 $y_2 = \{y_2(n)\}_{n=1}^{N+1}$ 使得 $0 < \|y_1\| < p < \|y_2\|$ 且对任意的 $n \in [1, N], 0 < y_1(n) < p < y_2(n).$

证明 分别取 r 充分小和 R 充分大,则由定理3直接可得定理6。

推论2 由下面的条件:

(H₂*) $f_0 = 0, f_\infty = 0$

替换(H₂),定理6的结论仍然成立。

定理7 如果下面两个条件:

(1) $f_0 > 1$ 且 $f^\infty < 1,$

(2) $f^0 < 1$ 且 $f_\infty > 1$

有一个成立,则边值问题(12)至少有一个正解。

证明 由定理5和定理6类似证明可得。

推论3 如果下面两个条件:

(1*) $f_0 = \infty$ 且 $f^\infty = 0$ (次线形)和(2*) $f^0 = 0$ 且

$f_\infty = \infty$ (超线性)有一个成立,则边值问题(12)至少有一个正解。

例1 如果 $a(n) \in (0, 1), 0 < \alpha, \beta > 1$,或者 $\alpha, \beta > 1$,则边值问题

$$\begin{cases} \Delta y(n) + a(n)y(n) = y^\alpha(n) + y^\beta(n), \\ y(1) = y(N+1) \end{cases} \quad (13)$$

至少有一个正解。

证明 非线性项 $f(n, y(n)) = y^\alpha(n) + y^\beta(n),$

如果 $a(n) \in (0,1), 0 < \alpha, \beta > 1$, 则 $f_0 = \infty, f^\infty = 0$; 如果 $\alpha, \beta > 1$, 则 $f^0 = 0, f_\infty = \infty$ 。无论哪种情况, 由推论 3 边值问题(13) 至少有一个正解。

例 2 假设方程 $\Delta y(n) + a(n)y(n) = \delta(n)[y^\alpha(n) + y^\beta(n)], y(1) = y(N+1),$ (14)

其中 $a(n) \in (0,1), 0 < \alpha < 1 < \beta, \delta(n) > 0$, 则方程(14) 至少有两个正解, 如果

$$\max_{n \in [1, N]} \frac{\delta(n)}{a(n)} < \sup_{\xi \in (0, +\infty)} \frac{\xi}{\xi^\alpha + \xi^\beta}.$$

证明 为了证明此结论, 应用推论 3, 非线性项 $f(n, y(n)) = \delta(n)[y^\alpha(n) + y^\beta(n)],$ 显然

$$f_0 = \infty, f_\infty = \infty.$$

因此 (H_1^*) 成立。令

$$T(\xi) := \frac{\xi}{\xi^\alpha + \xi^\beta}, \xi > 0,$$

则 $T(0^+) = T(\infty) = 0$ 且

$$T(p_1) = \sup_{\xi \in (0, +\infty)} T(\xi), p_1 = \left(\frac{1-\alpha}{\beta-1}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}.$$

因此, 当 $\xi \in \left[\frac{m}{M}p_1, p_1\right]$ 时, 有

$$f(n, \xi) \leq \delta(n)(p_1^\alpha + p_1^\beta) \leq a(n)(p_1^\alpha + p_1^\beta) \max_{n \in [1, N]}$$

$$\frac{\delta(n)}{a(n)} \leq a(n)(p_1^\alpha + p_1^\beta) T(p_1) = a(n)p_1.$$

这说明 (H_3) 成立。

因此推论 1 的条件均满足, 所以方程(14) 至少有两个正解。

参考文献:

[1] 姚庆六. 非线性二阶周期边值问题 n 个正解的存在性[J]. 中国石油大学学报: 自然科学版, 2009, 33(4): 175-178.
YAO Qing-liu. Existence of n positive solutions to a nonlinear second-order periodic boundary value problem[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2009, 33(4): 175-178.
[2] DECOSTER C, HABETS P. Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary value problems: classical and

recent results [M]//Zanolin. Nonlinear analysis and boundary value problems for ordinary differential equations. CISM-ICMS, 371, New York: Springer, 1996: 1-78.
[3] LADDLE G S, LAKSHMIKANTHAM V, VATSALA S. Monotone iterative techniques for nonlinear differential equations [M]. London: Pitman Advanced Publishing Program, 1985.
[4] ZHANG Xiao-ying, LI Xiao-yue, JIANG Da-qing, et al. Multiplicity positive solutions to periodic problems for first-order impulsive differential equations[J]. Computers and Mathematica with Applications, 2006, 52: 953-966.
[5] AGARWAL R P, O'REGAN D, LAKSHMIKANTHAM V, et al. Existence of positive solutions for singular initial and boundary value problems via the classical upper and lower solution approach [J]. Nonlinear Analysis, 2002, 50: 215-222.
[6] AGARWAL R P, O'REGAN D. Singular problems: an upper and lower solution approach[J]. J Math Anal Appl, 2000, 251: 230-250.
[7] AGARWAL R P, O'REGAN D. Singular initial and boundary value problems with sign changing nonlinearities [J]. IMA J Appl Math, 2000, 65: 173-198.
[8] DEIMLING K. Nonlinear functional analysis [M]. New York: Springer-Verlag, 1985.
[9] TORRES P J. Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a Krasnoselskii fixed point theorem [J]. J Differential Equations, 2003, 190: 643-662.
[10] LIN Xiao-ning, WANG Hong, JIANG Da-qing. Existence of single and multiple solutions for first order periodic boundary value problems [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica (English Series), 2007, 23(2): 289-302.
[11] MERDIVENCI A F, GUSEINOV G Sh. Positive periodic solutions for nonlinear difference equations with periodic coefficients [J]. J Math Anal Appl, 1999, 232: 166-182.

(编辑 修荣荣)

下 期 要 目

- 张 敏,等 基于双平方根算子的真振幅角度域成像
- 谭丽娟,等 东营凹陷博兴油田沙四上亚段滩坝砂岩油气富集特征及成藏主控因素
- 喻 顺,等 断陷盆地构造枢纽部位油气富集特征
- 戴俊生,等 高邮凹陷南断阶东部阜宁期构造应力场及对断层的控制
- 范泓澈,等 高温高压条件下 CH_4 和 CO_2 溶解度实验
- 罗万静,等 反七点井网产能快速评价新方法
- 樊冬艳,等 基于有限元的低渗透油藏水平井试井分析
- 王海勇,等 低渗透变形介质油藏流入动态关系
- 李亚军,等 基于 Darcy-Stokes 耦合模型的缝洞型介质等效渗透率分析
- 郑德帅,等 井底压差对岩石破碎的影响机制
- 王建军,等 内壁椭圆度对高钢级套管挤毁变形影响的试验研究
- 黄善波,等 幂律流体同心环空内层流脉动流的数值分析
- 张浦阳,等 海上自升式钻井平台桩靴穿刺现象的机制
- 魏建明,等 抗剥落剂对沥青表面自由能的影响
- 蒋 平,等 稠油油藏化学驱采收率的影响因素
- 段友智,等 磺酸盐驱油体系在多孔隙砂岩中的滞留与吸附损耗
- 宋 华,等 CuUSY 分子筛的制备及其吸附脱硫性能
- 单 娴,等 基于渗透率张量的非均质各向异性油藏油水两相数值模拟
- 王 兵,等 阵列声波测井中反射纵波和横波信号提取方法研究
- 王 峰,等 多目标产业结构优化最优控制模型的改进及求解