

文章编号:1673-5005(2010)02-0169-06

关于树的第二个最大特征值

谭尚旺, 姜静静

(中国石油大学 数学与计算科学学院, 山东 东营 257061)

摘要: 令 $T(n, i)$ 表示顶点数为 n 且匹配数为 i 的所有树的集合, 研究了 $T(4n-1, 2n-1)$ 中哪些树的第二个最大特征值等于 $\sqrt{\frac{1}{2}[n+1+\sqrt{(n+1)^2-8}]}$ 的一个猜想。此外, 还进一步得到了 $T(4n-1, 2n-1)$ 中树的第二个最大特征值的 3 个新的上界, 并且确定了达到上界的所有的树。

关键词: 树; 匹配; 谱半径; 第二个最大特征值

中图分类号: O 157.5 文献标志码: A doi:10.3969/j.issn.1673-5005.2010.02.035

On the second largest eigenvalue of trees

TAN Shang-wang, JIANG Jing-jing

(College of Mathematics and Computational Science in China University of Petroleum,
Dongying 257061, China)

Abstract: A conjecture about whose second largest eigenvalue of trees in $T(4n-1, 2n-1)$ be equal to $\sqrt{\frac{1}{2}[n+1+\sqrt{(n+1)^2-8}]}$ is made, where $T(n, i)$ represents the set of all trees with vertex number n and matching number i . Moreover, three new upper bounds of the second largest eigenvalue of trees in $T(4n-1, 2n-1)$ were obtained, and all trees corresponding the upper bounds were determined.

Key words: trees; matching; spectral radius; the second largest eigenvalue

1 问题的提出

设 G 是具有 n 个顶点的无向简单图。记 G 的邻接矩阵为 $A(G)$, 称 $A(G)$ 的特征多项式 $\det(\lambda E - A(G))$ 为 G 的特征多项式, 记为 $\phi(G, \lambda)$ 。既然 $A(G)$ 是一个实对称矩阵, 于是它的特征值都是实数, 不妨设它们按照不降的次序排列为

$$\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \cdots \geq \lambda_n(G),$$

称 $\lambda_k(G)$ 是 G 的第 k 个最大特征值, 称 $\lambda_1(G)$ 为 G 的谱半径。

G 的两个不同边在 G 中称为独立的, 如果它们在 G 中不邻接。 G 的一个两两独立的边集合称为 G 的一个匹配, 边数最多的匹配称为 G 的最大匹配并且一个最大匹配的边数称为 G 的匹配数。令 $\dot{M}$ 是

G 的一个最大匹配, 如果 G 的顶点 v 与 M 中的一个边关联, 则称 v 被 M 饱和; 如果 G 的每个顶点都被 M 饱和, 则称 M 是 G 的一个完美匹配。

二部图的特征值在量子化学理论中有其物理意义^[1]。Cvetković D M 曾经指出了图谱理论的几个进一步研究的方向, 其中之一就是对图进行分类和定序(classifying and ordering graphs)^[2]。既然树是特殊的二部图并且它在图论中起着重要的作用, 于是研究树的图论性质与它的特征值之间的关系是有意义和必要的。

令 $T(n, i)$ 表示顶点数为 n 且匹配数为 i 的所有树的集合。长期以来, 许多学者一直利用树的谱半径对树定序^[3-7]。但是, 如何利用树的其他特征值对树进行定序的研究较少。特别是利用树的第二个最

收稿日期: 2009-06-20

基金项目: 国家自然科学基金项目(10871204)

作者简介: 谭尚旺(1965-), 男(汉族), 山东泰安人, 教授, 硕士, 研究方向为图论。

大特征值对 $T(n, i)$ 中的树进行定序取得的结论更少, 目前只有当 $n = 2i, 2i + 1, 2i + 2$ 时有几个结论被得到^[8-11]。

文献[11]中证明了下述结论: 对 $T \in T(4n - 1, 2n - 1)$, 都有

$$\lambda_2(T) \leq \sqrt{\frac{1}{2}[n + 1 + \sqrt{(n + 1)^2 - 8}]},$$

并且该上界是可达的。文献[11]中猜想: 在 $T(4n - 1, 2n - 1)$ 中, 只有 4 个树的第二个最大特征值能够达到该上界。本文中证明该猜想的正确性, 并且对 $T \in T(4n - 1, 2n - 1)$, 给出 $\lambda_2(T)$ 的 3 个新的上界并确定达到上界的所有树。贯穿全文, 令 $o(G)$ 表示图 G 的顶点数, $i(G)$ 表示 G 的匹配数, $G \cong H$ 表示图 G 和 H 同构。特别记

$$\beta_{n,r} = \sqrt{\frac{1}{2}(n - \sqrt{n^2 - r})}, \quad \delta_{n,r} = \sqrt{\frac{1}{2}(n + \sqrt{n^2 - r})}.$$

引理 1^[1] 令 vu 是树 T 的一个边, 则 $\phi(T, \lambda) = \phi(T - vu, \lambda) - \phi(T - v - u, \lambda)$ 。

文献[5-7]中研究了 $T(n, i)$ 中树的谱半径, 综

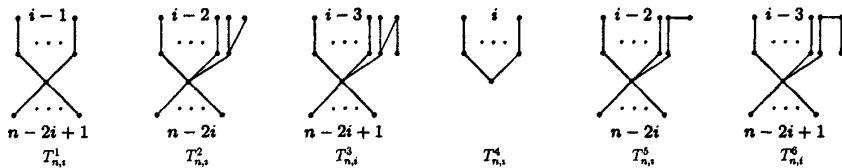


图 1 谱半径最大的前六个树

Fig. 1 The first six trees with the largest spectral radius

引理 3^[12] 令 T 是顶点数为 n 的树, 则对正整数 $k(1 \leq k \leq \frac{n}{2})$, 存在 T 的一个顶点 v , 使 $T - v$ 存在一个顶点数不超过 $\max\{n - 1 - k, k\}$ 的分支, 而 $T - v$ 的其他分支的顶点数都不超过 k 。

引理 4^[1] 令 G 是顶点数为 n 的无向图, V' 是 G 的一个 k 点子集, $G - V'$ 表示从 G 中删去 V' 中的所有顶点以及与 V' 中的点关联的所有边后得到的 G 的子图, 则

$$\lambda_j(G) \geq \lambda_j(G - V') \geq \lambda_{j+k}(G), \quad j = 1, 2, \dots, n - k.$$

2 主要结论及证明

引理 5 令 $\varepsilon_n = -(2n + 7) + 2\sqrt{n^2 + 8n + 8}$, 则当 $n \geq 9$ 时, 有

$$\lambda_1(T_{2n,n-1}^6) < \delta_{n+1, 11+\varepsilon_n}, \quad \lambda_1(T_{2n,n}^3) < \delta_{n+1, 11+\varepsilon_n}, \quad \lambda_1(T_{2n-1,n-1}^2) < \delta_{n+1, 11+\varepsilon_n}.$$

证明 由引理 2 知, $\lambda_1(T_{2n,n-1}^6)$ 是方程 $\psi(\lambda)$

合这 3 个文献的结论有下面的引理。

引理 2 令 $T_{n,i}^j \in T(n, i)$ 是图 1 所示的树 ($i \geq 6, j = 1, 2, \dots, 6$)。

(1) 如果 $n = 2i$, 则在 $T(n, i)$ 中, $T_{n,i}^1$ 和 $T_{n,i}^3$ 依次具有谱半径的第一大值和第二大值。

(2) 如果 $n = 2i + 1$, 则在 $T(n, i)$ 中, $T_{n,i}^1, T_{n,i}^2, T_{n,i}^4, T_{n,i}^3, T_{n,i}^5$ 和 $T_{n,i}^6$ 依次具有谱半径的第一大值到第六大值。

(3) 如果 $n \geq 2i + 2$, 则在 $T(n, i)$ 中, $T_{n,i}^1, T_{n,i}^2, T_{n,i}^3, T_{n,i}^5$ 和 $T_{n,i}^6$ 依次具有谱半径的第一大值到第五大值。其中 $\lambda_1(T_{n,i}^1) = \delta_{n-i+1, 4(n-2i+1)}$, $\lambda_1(T_{n,i}^2)$, $\lambda_1(T_{n,i}^3)$ 和 $\lambda_1(T_{n,i}^6)$ 依次是下列方程的最大正根:

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - 2)[\lambda^4 - (n - i)\lambda^2 + (n - 2i - 1)] - 2 &= 0. \\ (\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1)[\lambda^4 - (n - i)\lambda^2 + (n - 2i + 1)] - \lambda^4 &= 0. \\ (\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1)[\lambda^4 - (n - i)\lambda^2 + (n - 2i + 1)] - \lambda^2 &= 0. \end{aligned}$$

$= 0$ 的最大正根, 其中

$$\psi(\lambda) = (\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1)[\lambda^4 - (n + 1)\lambda^2 + 3] - \lambda^2.$$

由于

$$\psi(0) = 3 > 0, \quad \psi(\beta_{3,4}) = -\beta_{3,4}^2 < 0,$$

$$\psi(1) = n - 4 > 0, \quad \psi(\delta_{n+1, 12}) = -\delta_{n+1, 12}^2 < 0,$$

$$\psi(\delta_{n+1, 11+\varepsilon_n}) = \frac{(n-2)(1-\varepsilon_n)-4}{4}\delta_{n+1, 11+\varepsilon_n}^2 +$$

$$\frac{\varepsilon_n^2 + 6\varepsilon_n - 7}{16} > \frac{1}{12} \cdot \frac{2n+1}{2} - \frac{1}{2} > 0,$$

于是 $\psi(\lambda) = 0$ 的 4 个正根分别位于区间 $(0, \beta_{3,4})$, $(\beta_{3,4}, 1)$, $(1, \delta_{n+1, 12})$ 和 $(\delta_{n+1, 12}, \delta_{n+1, 11+\varepsilon_n})$ 内。因此, $\lambda_1(T_{2n,n-1}^6) < \delta_{n+1, 11+\varepsilon_n}$ 。

由引理 2 知, $\lambda_1(T_{2n,n}^3)$ 是方程 $\varphi(\lambda) = 0$ 的最大正根, 其中

$$\varphi(\lambda) = (\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1)(\lambda^4 - n\lambda^2 + 1) - \lambda^4.$$

由于

$$\varphi(0) = 1 > 0, \quad \varphi(\beta_{3,4}) = -\beta_{3,4}^4 < 0,$$

$$\varphi(1) = n - 3 > 0, \varphi(\delta_{3,4}) = -\delta_{3,4}^4 < 0,$$

$$\varphi(\delta_{n+1,11+\varepsilon_n}) = \psi(\delta_{n+1,11+\varepsilon_n}) + (\delta_{n+1,11+\varepsilon_n}^2 - 1)(\delta_{n+1,11+\varepsilon_n}^4 - 5\delta_{n+1,11+\varepsilon_n}^2 + 2) > 0,$$

于是 $\varphi(\lambda) = 0$ 的 4 个正根分别位于区间 $(0, \beta_{3,4})$, $(\beta_{3,4}, 1)$, $(1, \delta_{3,4})$ 和 $(\delta_{3,4}, \delta_{n+1,11+\varepsilon_n})$ 内。因此, $\lambda_1(T_{2n,n}^3) < \delta_{n+1,11+\varepsilon_n}$ 。

由引理 2 知, $\lambda_1(T_{2n-1,n-1}^2)$ 是方程 $\omega(\lambda) = 0$ 的最大正根, 其中

$$\omega(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 2)(\lambda^2 - n) - 2.$$

由于

$$\omega(0) = -2 < 0, \omega(1) = n - 3 > 0, \omega(\sqrt{2}) = -2 < 0,$$

$$\omega(\delta_{n+1,11+\varepsilon_n}) > \frac{2n+1}{2} \left(\frac{2n+1}{2} - 2 \right) \left(\frac{2n+1}{2} - n \right) - 2 > 0,$$

于是方程 $\omega(\lambda) = 0$ 的 3 个正根分别位于区间 $(0, 1)$, $(1, \sqrt{2})$ 和 $(\sqrt{2}, \delta_{n+1,11+\varepsilon_n})$ 内。因此, $\lambda_1(T_{2n-1,n-1}^2) < \delta_{n+1,11+\varepsilon_n}$ 。

令 $W_j (j=1, 2, \dots, 20)$ 是图 2 中所示的树, 记

$$\xi_j = \lambda(\lambda^2 - 1)^{2n-j}, \quad \theta(s, t) = \lambda^4 - s\lambda^2 + t.$$

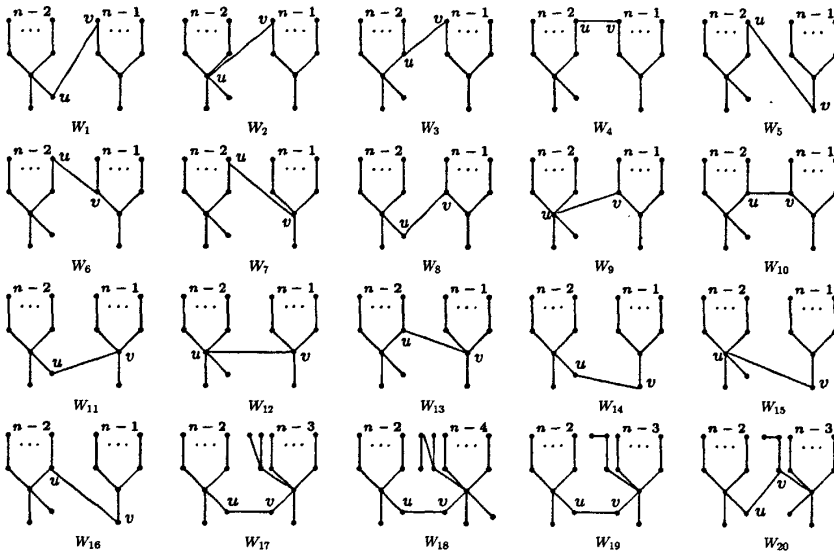


图 2 $T(4n-1, 2n-1)$ 中的 20 棵树

Fig. 2 Twenty trees of $T(4n-1, 2n-1)$

由引理 1, 容易得到

$$\phi(W_5, \lambda) = \xi_6 [(\lambda^2 - 1)\theta(n+1, 2)\theta(n+1, 1) - \theta(n+1, 3)\theta(n, 0)].$$

$$\phi(W_6, \lambda) = \xi_7 [\theta(2, 1)\theta(n+1, 2)\theta(n+1, 1) - \lambda^2\theta(n+1, 3)\theta(n, 1)].$$

$$\phi(W_7, \lambda) = \xi_5 [\theta(n+1, 2)\theta(n+1, 1) - \lambda^2\theta(n+1, 3)].$$

$$\phi(W_8, \lambda) = \xi_6 [(\lambda^2 - 1)\theta(n+1, 2)\theta(n+1, 1) - \theta^2(n, 1)].$$

$$\phi(W_9, \lambda) = \xi_5 [\theta(n+1, 2)\theta(n+1, 1) - \lambda^2\theta(n, 1)].$$

$$\phi(W_{10}, \lambda) = \xi_7 [\theta(2, 1)\theta(n+1, 2)\theta(n+1, 1) - \lambda^2\theta(n, 2)\theta(n, 1)].$$

$$\phi(W_{11}, \lambda) = \xi_5 [\theta(n+1, 2)\theta(n+1, 1) - (\lambda^2 - 1)\theta(n, 1)].$$

$$\phi(W_{12}, \lambda) = \xi_5 [\theta(n+1, 2)\theta(n+1, 1) -$$

$$\lambda^2\theta(2, 1)].$$

$$\phi(W_{13}, \lambda) = \xi_5 [\theta(n+1, 2)\theta(n+1, 1) - \lambda^2\theta(n, 2)].$$

$$\phi(W_{14}, \lambda) = \xi_5 [\theta(n+1, 2)\theta(n+1, 1) - (\lambda^2 - n)\theta(n, 1)].$$

$$\phi(W_{15}, \lambda) = \xi_5 [\theta(n+1, 2)\theta(n+1, 1) - \lambda^2\theta(n+1, n)].$$

$$\phi(W_{16}, \lambda) = \xi_6 [(\lambda^2 - 1)\theta(n+1, 2)\theta(n+1, 1) - \theta(n, 2)\theta(n, 0)].$$

$$\phi(W_{17}, \lambda) = \xi_6 [\theta(n+1, 1) [\lambda^2\theta(n+1, 2) - \theta(n, 2)] - \theta(n, 1)\theta(n+1, 0) - \theta(1, 0)].$$

$$\phi(W_{18}, \lambda) = \xi_5 [\theta(3, 1) [\theta(n+1, 1)\theta(n, 3) - \theta(n, 1)] - \theta(1, 0) [\lambda^2\theta(n+1, 2) - \theta(n, 1)]]].$$

$$\phi(W_{19}, \lambda) = \xi_6 [(\lambda^2 - 1) [\theta(n+1, 1)\theta(n+1, 2) - \lambda^2] - \theta(n+1, 1)\theta(n, 2) + \theta(n, 1)].$$

$$\phi(W_{20}, \lambda) = \xi_7 [\theta(n+1, 2) [\theta(2, 0)\theta(n, 2) -$$

$$\lambda^2 \theta(2,1) - (\lambda^2 - 1) \theta(n,1) \theta(n,2) \}.$$

引理6 如果 $n \geq 8$, 则

$$(1) \lambda_2(W_j) = \delta_{n+1,8}, j=1, 2, 3, 4.$$

(2) $\delta_{n+1,11+\varepsilon_n} < \lambda_2(W_7) < \lambda_2(W_6) < \lambda_2(W_5) < \delta_{n+1,8}$, 其中 $\lambda_2(W_5)$, $\lambda_2(W_6)$ 和 $\lambda_2(W_7)$ 依次是下方程的第二大正根:

$$(\lambda^2 - 1) \theta(n+1,2) \theta(n+1,1) - \theta(n+1,3) \theta(n,0) = 0.$$

$$\theta(2,1) \theta(n+1,2) \theta(n+1,1) - \lambda^2 \theta(n+1,3) \theta(n,1) = 0.$$

$$\theta(n+1,2) \theta(n+1,1) - \lambda^2 \theta(n+1,3) = 0.$$

$$(3) \lambda_2(W_j) < \delta_{n+1,11+\varepsilon_n}, j=8, 9, \dots, 20.$$

证明 (1) 对 $j=1, 2, 3, 4$, 容易发现

$$\lambda_1(W_j - v) = \lambda_2(W_j - v) = \lambda_1(T_{2n-1,n-1}^1) = \delta_{n+1,8},$$

并且由引理4知,

$$\lambda_1(W_j - v) \geq \lambda_2(W_j) \geq \lambda_2(W_j - v).$$

因此, $\lambda_2(W_j) = \delta_{n+1,8}$.

(2) 令 $\xi_5^{-1} \phi(W_7, \lambda) = f(\lambda)$, $\mu = \delta_{n+1,11+\varepsilon_n}$, 则 $\lambda_2(W_7)$ 是 $f(\lambda)$ 的第二大正根. 由于

$$f(0) = 2 > 0, f(\beta_{n+1,8}) = -\beta_{n+1,8}^2 < 0,$$

$$f(\mu) = \frac{\varepsilon_n^2 + 10\varepsilon_n + 21}{16} - \frac{1 - \varepsilon_n}{4} \mu^2 =$$

$$\frac{(n+1-\mu^2)(n+4-\sqrt{n^2+8n+8})}{2} > 0,$$

$$f(\delta_{n+1,10}) = -\frac{1}{4}(2\delta_{n+1,10}^2 - 3) < 0, f(+\infty) > 0,$$

于是 $f(\lambda)$ 的 4 个正根分别位于区间 $(0, \beta_{n+1,4})$, $(\beta_{n+1,4}, \mu)$, $(\mu, \delta_{n+1,10})$, $(\delta_{n+1,10}, +\infty)$ 内, 即

$$\delta_{n+1,11+\varepsilon_n} = \mu < \lambda_2(W_7) < \delta_{n+1,10}. \quad (1)$$

类似于 $\xi_5^{-1} \phi(W_7, \lambda)$ 的讨论, 容易发现 $\xi_6^{-1} \phi(W_5, \lambda)$ 的 5 个正根分别位于下列 5 个区间:

$$(0, \beta_{n+1,8}), (\beta_{n+1,8}, 1), (1, \delta_{n+1,10}), (\delta_{n+1,10}, \delta_{n+1,8}), (\delta_{n+1,8}, +\infty).$$

而 $\xi_7^{-1} \phi(W_6, \lambda)$ 的 6 个正根分别位于下列 6 个区间:

$$(0, \beta_{n+1,4}), (\beta_{n+1,4}, \beta_{n+1,12}), (\beta_{n+1,12}, 1), (1, \delta_{n+1,10}), (\delta_{n+1,10}, \delta_{n+1,8}), (\delta_{n+1,8}, +\infty).$$

因此, 对 $j=5, 6$, 有

$$\delta_{n+1,10} < \lambda_2(W_j) < \delta_{n+1,8}, \phi(W_j, \delta_{n+1,10}) > 0, \phi(W_j, \delta_{n+1,8}) < 0.$$

由 $\phi(W_5, \lambda)$ 和 $\phi(W_6, \lambda)$ 得

$$\phi(W_5, \lambda) - \phi(W_6, \lambda) = \lambda^3(\lambda^2 - 1)^{2n-7} [\lambda^4 - (n+1)\lambda^2 + 3][\lambda^2 - (n-1)].$$

于是对 $\delta_{n+1,10} < \lambda < \delta_{n+1,8}$, 都有 $\phi(W_5, \lambda) > \phi(W_6, \lambda)$.

因此, 由上面的讨论得

$$\delta_{n+1,10} < \lambda_2(W_6) < \lambda_2(W_5) < \delta_{n+1,8}. \quad (2)$$

由式(1)和式(2)知, $\delta_{n+1,11+\varepsilon_n} < \lambda_2(W_7) < \lambda_2(W_6) < \lambda_2(W_5) < \delta_{n+1,8}$.

(3) 类似于 $\xi_5^{-1} \phi(W_7, \lambda)$ 的讨论, 对 $j=9, 12, 13, 15$, 容易发现 $\xi_5^{-1} \phi(W_j, \lambda)$ 的 4 个正根分别位于下列 4 个区间:

$$(0, \beta_{n+1,4}), (\beta_{n+1,4}, 1), (1, \delta_{n+1,12}), (\delta_{n+1,12}, +\infty).$$

对 $j=11, 14$, 容易发现 $\xi_5^{-1} \phi(W_j, \lambda)$ 的 4 个正根分别位于下列 4 个区间:

$$(0, \beta_{n+1,8}), (\beta_{n+1,8}, \sqrt{n}), (\sqrt{n}, \delta_{n+1,12}), (\delta_{n+1,12}, +\infty).$$

对 $j=8, 16, 17, 19$, 容易发现 $\xi_6^{-1} \phi(W_j, \lambda)$ 的 5 个正根分别位于下列 5 个区间:

$$(0, \beta_{n,4}), (\beta_{n,4}, 1), (1, \delta_{n,4}), (\delta_{n,4}, \delta_{n+1,12}), (\delta_{n+1,12}, +\infty).$$

对 $j=10, 18, 20$, 容易发现 $\xi_7^{-1} \phi(W_j, \lambda)$ 的 6 个正根分别位于下列 6 个区间:

$$(0, \beta_{n,4}), (\beta_{n,4}, \beta_{n+1,12}), (\beta_{n+1,12}, 1), (1, \delta_{n,4}), (\delta_{n,4}, \delta_{n+1,12}), (\delta_{n+1,12}, +\infty).$$

由上面的讨论, 对 $j=8, 9, \dots, 20$, 都有 $\lambda_2(W_j) < \delta_{n+1,11+\varepsilon_n}$.

引理7 令 T 是一个树, $o(T) \leq 2n-2$ 并且 T 至多有两个顶点不被它的某个最大匹配 M 饱和. 如果 $n \geq 6$, 则 $\lambda_1(T) < \delta_{n+1,11+\varepsilon_n}$.

证明 如果 $o(T)$ 是奇数, 记 $o(T) = 2s-1$, 则 $s \leq n-1$ 且 $i(T) = s-1$. 由引理2得

$$\lambda_1(T) \leq \lambda_1(T_{o(T), i(T)}^1) = \delta_{s+1,8} \leq \delta_{n,8} < \delta_{n+1,11+\varepsilon_n}.$$

如果 $o(T)$ 是偶数, 记 $o(T) = 2s$, 则 $s \leq n-1$ 且 $i(T) = s, s-1$. 由引理2得

$$\lambda_1(T) \leq \lambda_1(T_{o(T), i(T)}^1) = \delta_{2s-i(T)+1, 4(2s-2i(T)+1)} \leq \delta_{s+2, 12} \leq \delta_{n+1, 12} < \delta_{n+1, 11+\varepsilon_n}.$$

定理1 不仅证明了文献[11]中提出的猜想是正确的, 而且也给出了 $\lambda_2(T)$ 的 3 个新的上界.

定理1 令 $n \geq 9$, $J_k = \{W_j; j=1, 2, \dots, k\}$ 并且 $T \in T(4n-1, 2n-1)$.

(1) $\lambda_2(T) \leq \delta_{n+1,8}$, 并且等式成立, 当且仅当 $T \in J_4$.

(2) 如果 $T \notin J_4$, 则 $\lambda_2(T) \leq \lambda_2(W_5)$, 并且等式成立, 当且仅当 $T \equiv W_5$.

(3) 如果 $T \notin J_5$, 则 $\lambda_2(T) \leq \lambda_2(W_6)$, 并且等式成立, 当且仅当 $T \equiv W_6$.

(4) 如果 $T \notin J_6$, 则 $\lambda_2(T) \leq \lambda_2(W_7)$, 并且等式成立, 当且仅当 $T \cong W_7$.

证明 假设 $T \notin J_{20}$, 由引理 6, 只需要证明下式:

$$\lambda_2(T) \leq \delta_{n+1, 11+\varepsilon_n}. \quad (3)$$

在引理 3 中取 $k=2n-1$, 则存在一个顶点 $v \in V(T)$, 使得 $T-v$ 的每个分支, 记为 $T_j (j=1, 2, \dots, l)$, 都有 $o(T_j) \leq 2n-1$. 由引理 4 得

$$\lambda_2(T) \leq \lambda_1(T-v) = \max \{ \lambda_1(T_1), \lambda_1(T_2), \dots, \lambda_1(T_l) \}. \quad (4)$$

如果 T_j 有完美匹配, 记 $o(T_j) = 2s_j$, 则 $i(T_j) = s_j \leq n-1$. 由引理 2 得

$$\lambda_1(T_j) \leq \lambda_1(T_{o(T_j), i(T_j)}^1) = \delta_{s_j+1, 4} \leq \delta_{n, 4} < \delta_{n+1, 11+\varepsilon_n}. \quad (5)$$

令 M 是 $T-v$ 的一个最大匹配, 则 $T-v$ 至多有两个顶点不被 M 饱和. 区分下面 3 种情形.

情形 1 设 $T-v$ 的每个顶点都被 M 饱和.

对 $j=1, 2, \dots, l$, 因为每个 T_j 有完美匹配, 所以式(5)都成立. 因此, 由式(4)知, 式(3)成立.

情形 2 设 $T-v$ 有两个顶点不被 M 饱和并且它们在 $T-v$ 的同一个分支中.

不失一般性, 假设 T_1 有两个顶点不被 M 饱和, 而 $T-v$ 的其他分支 $T_j (j=2, 3, \dots, l)$ 都有完美匹配. 令 $o(T_1) = 2s_1$, 则 $s_1 \leq n-1$ 且 $i(T_1) = s_1-1$. 由引理 2 得

$$\lambda_1(T_1) \leq \lambda_1(T_{o(T_1), i(T_1)}^1) = \delta_{s_1+2, 12} \leq \delta_{n+1, 12} < \delta_{n+1, 11+\varepsilon_n}.$$

因此, 结合式(5)和式(4)知, 式(3)成立.

情形 3 设 $T-v$ 有两个顶点不被 M 饱和并且它们在 $T-v$ 的不同分支中.

不失一般性, 假设 T_1 和 T_2 都各有一个顶点不被 M 饱和, 而 $T-v$ 的其他分支 $T_j (j=3, 4, \dots, l)$ 都有完美匹配. 对 $j=1, 2$, 令 $o(T_j) = 2s_j-1$, 则 $s_j \leq n$ 且 $i(T_j) = s_j-1$.

对 $j=1, 2$, 如果 $s_j \leq n-1$, 则由引理 2 得

$$\lambda_1(T_j) \leq \lambda_1(T_{o(T_j), i(T_j)}^1) = \delta_{s_j+1, 8} \leq \delta_{n, 8} < \delta_{n+1, 11+\varepsilon_n}.$$

对 $j=1, 2$, 如果 $s_j = n$ 且 $T_j \not\cong T_{2n-1, n-1}^1$, 则由引理 2 和引理 5 得

$$\lambda_1(T_j) \leq \lambda_1(T_{o(T_j), i(T_j)}^2) = \lambda_1(T_{2n-1, n-1}^2) < \delta_{n+1, 11+\varepsilon_n}.$$

因此, 当 $T_1 \not\cong T_{2n-1, n-1}^1$ 并且 $T_2 \not\cong T_{2n-1, n-1}^1$ 时, 由式(5)和式(4)知, 式(3)成立. 不妨设 $T_1 \cong T_{2n-1, n-1}^1$. 令 u 是 v 在 T_1 中的唯一邻接顶点, 则存在 $T-u$ 的一个分支, 比如说 $\tilde{T}_1, \tilde{T}_1$ 包含 v 并且 $o(\tilde{T}_1) = 2n$, 而 T

$-u$ 的其他分支, 比如说 $\tilde{T}_j (j=2, 3, \dots, r)$, 都满足 $o(\tilde{T}_j) \leq 2n-2$. 令 $\tilde{M}$ 是 $T-u$ 的一个最大匹配, 则对 $j=1, 2, \dots, r, \tilde{T}_j$ 至多有两个顶点不被 $\tilde{M}$ 饱和. 由引理 4 得

$$\lambda_2(T) \leq \lambda_1(T-u) = \max \{ \lambda_1(\tilde{T}_1), \lambda_1(\tilde{T}_2), \dots, \lambda_1(\tilde{T}_r) \}. \quad (6)$$

由引理 7, 对 $j=2, 3, \dots, r$, 都有

$$\lambda_1(\tilde{T}_j) < \delta_{n+1, 11+\varepsilon_n}. \quad (7)$$

情形 3.1 设 $\tilde{T}_1$ 有完美匹配. 此时, $o(\tilde{T}_1) = 2n$ 且 $i(\tilde{T}_1) = n$.

如果 $\tilde{T}_1 \cong T_{2n, n}^1$, 则 $T \in J_{16}$, 这与 $T \notin J_{20}$ 矛盾. 因此, $\tilde{T}_1 \not\cong T_{2n, n}^1$. 于是由引理 2 和引理 5 得 $\lambda_1(\tilde{T}_1) \leq \lambda_1(T_{2n, n}^3) < \delta_{n+1, 11+\varepsilon_n}$. 因此, 由式(6)和式(7)知, 式(3)成立.

情形 3.2 设 $\tilde{T}_1$ 没有完美匹配. 此时, $o(\tilde{T}_1) = 2n$ 且 $i(\tilde{T}_1) = n-1$.

如果 $\tilde{T}_1 \cong T_{2n, n-1}^1$, 则 $T \cong W_2$. 如果 $\tilde{T}_1 \cong T_{2n, n-1}^2$, 则 $T \in \{W_3, W_{17}\}$. 如果 $\tilde{T}_1 \cong T_{2n, n-1}^3$, 则 $T \cong W_{18}$. 如果 $\tilde{T}_1 \cong T_{2n, n-1}^5$, 则 $T \in \{W_j; j=4, 19, 20\}$. 上面的结论都与 $T \notin J_{20}$ 矛盾. 因此, $\tilde{T}_1 \notin \{T_{2n, n-1}^j; j=1, 2, 3, 5\}$. 由引理 2 和引理 5 得 $\lambda_1(\tilde{T}_1) \leq \lambda_1(T_{2n, n-1}^6) < \delta_{n+1, 11+\varepsilon_n}$. 因此, 由式(6)和式(7)知, 式(3)成立.

根据上面 3 种情形, 完成了式(3)的证明.

注释: 当 $n=8$ 时, 用 2.945 19 代替引理 5~7 和定理 1 中的 $\delta_{n+1, 11+\varepsilon_n}$, 相应的结论也都成立. 因此, 定理 1 的结论对 $n=8$ 也成立.

参考文献:

- [1] CVETKOVIĆ D M, DOOB M, SACHS H. Spectra of Graphs [M]. New York: Academic Press, 1980.
- [2] CVETKOVIĆ D M. Some possible directions in further investigations of graph spectrum [M]//L Lovász, V T Sós. Algebra Methods in Graph Theory, Vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1981:47-67.
- [3] HOFMEISTER M. On the two largest eigenvalues [J]. Linear Algebra Appl, 1997, 260:43-59.
- [4] CHANG A, HUANG Q X. Ordering trees by their largest eigenvalues [J]. Linear Algebra Appl, 2003, 370: 175-184.
- [5] HOU Y P, LI J S. Bounds on the largest eigenvalues of trees with a given size of matching [J]. Linear Algebra Appl, 2001, 342:203-217.
- [6] 谭尚旺, 郭纪明. 树的最大特征值 [J]. 石油大学学报: 自然科学版, 2002, 26(6):113-117.

- TAN Shang-wang, GUO Ji-ming. The largest eigenvalue on trees [J]. Journal of the University of Petroleum (Edition of Natural Science), China, 2002, 26(6): 113-117.
- [7] 谭尚旺. 给定边独立数的树的谱半径的新上界 [J]. 广西工学院学报, 2008, 19(1): 13-17.
- TAN Shang-wang. On the new upper bounds of spectral radius of trees given edge independence number [J]. Journal of Guangxi University of Technology, 2008, 19(1): 13-17.
- [8] GUO J M, TAN S W. A conjecture on the second largest eigenvalue of a tree with perfect matchings [J]. Linear Algebra Appl, 2002, 347: 9-15.
- [9] GUO J M, TAN S W. A note on the second largest eigenvalue of a tree with perfect matching [J]. Linear Algebra Appl, 2004, 380: 125-134.
- [10] 谭尚旺, 郭纪明. 树的第二个最大特征值 [J]. 数学研究与评论, 2004, 24(3): 541-548.
- TAN Shang-wang, GUO Ji-ming. The second largest eigenvalues of trees [J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2004, 24(3): 541-548.
- [11] TAN Shang-wang, GUO Ji-ming. The second largest eigenvalue of trees [J]. Australasian Journal of Combinatorics, 2006, 34: 313-320.
- [12] SHAO J Y. Bounds on the k th eigenvalues of trees and forests [J]. Linear Algebra Appl, 1991, 149: 19-34.

(编辑 修荣荣)

(上接第 165 页)

- [14] 梅凤翔. 包含伺服约束的非完整系统的 Lie 对称性与守恒量 [J]. 物理学报, 2000, 49(7): 1207-1210.
- MEI Feng-xiang. Lie symmetries and conserved quantities of Nonholonomic systems with Servoconstraints [J]. Acta Physica Sinica, 2000, 49(7): 1207-1210.
- [15] MEI F X, XU X J, ZHANG Y F. A unified symmetry of Lagrangian systems [J]. Acta Mechanica Sinica, 2004, 20(6): 668-671.
- [16] WU H B. Lie-form invariance of the Lagrange system [J]. Chinese Physics, 2005, 14(3): 452-454.
- [17] XU X J, QIN M C, MEI F X. Unified symmetry of holonomic mechanical systems [J]. Chinese Physics, 2005, 14(7): 1287-1289.
- [18] 梅凤翔. Lagrange 系统的 Noether-Lie 对称性 [J]. 北京理工大学学报, 2005, 25(4): 283-285.
- MEI Feng-xiang. Noether-Lie symmetry of Lagrange system [J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2005, 25(4): 283-285.
- [19] 李元成, 夏丽莉, 赵伟, 等. 机电系统的统一对称性 [J]. 物理学报, 2007, 56(9): 5037-5040.
- LI Yuan-cheng, XIA Li-li, ZHAO Wei, et al. Unified symmetry of mechanico-electrical systems [J]. Acta Physica Sinica, 2007, 56(9): 5037-5040.
- [20] XIA L L, LI Y C, HOU Q B, et al. Unified symmetry of nonholonomic mechanical systems with variable mass [J]. Chinese Physics, 2006, 15(5): 903-906.
- [21] 董文山. 非完整力学系统的高阶 Routh 方程及其正则形式 [J]. 中国石油大学学报: 自然科学版, 2008, 32(3): 165-168.
- DONG Wen-shan. Higher order Routh equations of a non-holonomic mechanical system and its canonical form [J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2008, 32(3): 165-168.

(编辑 修荣荣)

(上接第 168 页)

- [11] CHEN Z X. The zero, pole and order of meromorphic solutions of differential equations with meromorphic coefficients [J]. Kodai Math J, 1996, 19: 341-354.
- [12] HAYMAN W. The local growth of power series; a survey of the Wiman-Valiron method [J]. Canad Math Bull, 1974, 17: 317-358.
- [13] 何育赞, 肖修治. 代数体函数与常微分方程 [M]. 北京: 科学出版社, 1988.

(编辑 修荣荣)