文章编号:1673-5005(2010)02-0166-03

一类非齐次微分方程解的增长性

吕巍然, 王君苓, 陈院生, 李晓静

(中国石油大学 数学与计算科学学院,山东 东营 257061)

摘要:研究一类非齐次线性微分方程 $f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_1f'-(e^{Q(z)}-h_0)f=1(k\geqslant1)$ 解的增长性,其中 $a_j(j=1,2,\cdots,k-1)$ 为常数,$Q(z)$ 为非常数多项式,h_0 为超越慢增长整函数。利用所得结果,还可以给出有关亚纯函数唯一性的结果。

关键词:微分方程; 整函数; 增长级; 超级

中图分类号:O 174.5 文献标志码:A doi:10.3969/j.issn.1673-5005.2010.02.034

Growth of solutions of some non-homogeneous differential equations

LÜ Wei-ran, WANG Jun-ling, CHEN Yuan-sheng, LI Xiao-jing

(*College of Mathematics and Computational Science in China University of Petroleum, Dongying 257061, China*)

Abstract: The growth of solutions of $f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_1f'-(e^{Q(z)}-h_0)f=1(k\geqslant1)$ with $a_j(j=1,2,\cdots,k-1)$ constants is studied, where $Q(z)$ is a non-constant polynomial and h_0 is transcendental slowly growth entire function. The uniqueness of meromorphic functions was obtained on basis of this.

Key words: differential equation; entire function; order; hyper order

1 问题的提出

本文中使用值分布理论的基本概念和标准记号[1-4]:用 $T(r,f)$ 表示亚纯函数 $f(z)$ 的特征函数,用 $m(r,f)$ 表示 $f(z)$ 的均值函数等。特别地,用记号 $\sigma(f)$ 和 $\sigma_2(f)$ 分别表示亚纯函数 $f(z)$ 的增长级和超级[4,5]。假设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是非常数亚纯函数,a 为任意复数。如果 $f(z)-a$ 与 $g(z)-a$ 的零点相同,而且每个零点的重级也相同,则称 a 为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 CM 公共值[4-6]。

对于集合 $E\subset\mathbf{R}^+$,用 $\lambda(E)$ 表示 E 的对数测度,用 $\chi_E(t)$ 表示集合 E 在 $\mathbf{R}^+$ 上的特征函数,则可以定义集合 E 的上对数密度和下对数密度如下:

$$\overline{\ln\ \mathrm{dens}}E=\lim_{r\to\infty}\sup\frac{\lambda(E\cap[1,r])}{\ln r},$$

$$\underline{\ln\ \mathrm{dens}}E=\lim_{r\to\infty}\inf\frac{\lambda(E\cap[1,r])}{\ln r}.$$

考虑微分方程

$$f^{(k)}-e^{Q(z)}f=1,\ k\geqslant1 \tag{1}$$

的增长级问题,其中 $Q(z)$ 是非常数多项式。

杨连中教授[7]证明了定理 A。

定理 A 非齐次微分方程(1)的任意解必为无穷级整函数。

考察微分方程

$$f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_1f'-(e^{Q(z)}-h_0)f=1. \tag{2}$$

式中,$a_j(j=1,2,\cdots,k-1)$ 为常数,$k\geqslant1$;h_0 为慢增长整函数,即 $\sigma(h_0)<\frac{1}{2}$。

不难发现方程(1)是方程(2)的特殊情况,本文中将继续研究方程(2)的解具有怎样的增长性。

对于 h_0 为常数的特殊情况,王珺曾给出有关方程解的增长性及其应用[6],并证明了如下结果:

定理 B 如果 h_0 为常数,则微分方程(2)的任意非零解 $f(z)$ 满足 $\sigma(f)=1$ 或 $\sigma(f)=\infty$,且任意具有无穷级的解其超级为不大于 $\deg Q$ 的正整数;

定理 C 设 f 为有穷级整函数且 $\sigma(f)\neq1$, 如

收稿日期:2009-02-10

作者简介:吕巍然(1962-),男(汉族),山东沾化人,教授,博士,研究方向为复分析。

果 a 为 f 和 $L(f)=f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_1f'+a_0f$ 的 CM 公共值, 则 $\frac{L(f)-a}{f-a}=c$, $c\neq0$ 为常数。

定理 1　如果 h_0 为超越慢增长整函数,则微分方程(2)的任意非零解 $f(z)$ 满足 $\sigma(f)=\infty$。

把函数与其导数结合起来研究函数的唯一性,也是亚纯函数值分布论中一个重要的研究方向,且大多数仅仅涉及一阶导数或者 k 阶导数[4]。本文中把相关结果推广到亚纯函数 f 的线性微分多项式。

定理 2　设 f 为有穷级整函数, 如果 a 为 f 和

$$L(f)=f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_1f'+h_0f$$

的 CM 公共值, 则 $\frac{L(f)-a}{f-a}=c$, $c\neq0$ 为常数。

2　主要引理

引理 1[9]　假设 $g(z)$ 是整函数,且级 $\sigma(g)=\sigma$, $v_g(r)$ 是 g 的中心指标,那么

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln v_g(r)}{\ln r}=\sigma. \tag{3}$$

引理 2[10]　假设 $w(z)$ 为整函数,满足 $\sigma(w)=\rho<\frac{1}{2}$, 设 $A(r)=\inf\limits_{|z|=r}\ln|w(z)|$, $B(r)=\sup\limits_{|z|=r}\ln|w(z)|$。如果 $\rho<\alpha<1$,则

$$\underline{\ln\ \mathrm{dens}}\{r:A(r)>\cos(\pi\alpha)B(r)\}\geqslant1-\rho/\alpha. \tag{4}$$

引理 3[11]　假设 $w(z)$ 为有穷级亚纯函数,则对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在有穷线性测度集合 H 使得满足 $|z|=r\notin H\cup[0,1]$, $r\to\infty$,有

$$|w(z)|\leqslant\exp\{r^{\sigma(w)+\varepsilon}\}. \tag{5}$$

引理 4[2]　假设 $P(z)=(\alpha+i\beta)z^n+\cdots(\alpha,\beta$ 是实数, $|\alpha|+|\beta|\neq0)$ 是多项式,且次数 $n\geqslant1$, $A(z)$ 是不恒为零的整函数,且 $\sigma(A)<n$。令 $g(z)=A(z)e^{P(z)}$, $z=re^{i\theta}$, $\delta(P,\theta)=\alpha\cos(n\theta)-\beta\sin(n\theta)$, 那么对于任给的正数 ε,存在集合 $E\subset(1,+\infty)$ 具有有穷对数测度,满足对任意 $\theta\in[0,2\pi)\setminus H_1$ $(H_1=\{\theta\in[0,2\pi);\delta(P,\theta)=0\})$, $|z|=r\notin[0,1]\cup E$,有

(i) 如果 $\delta(P,\theta)>0$,则

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\}<|g(re^{i\theta})|<\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\}; \tag{6}$$

(ii) 如果 $\delta(P,\theta)<0$,则

$$\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\}<|g(re^{i\theta})|<\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\}. \tag{7}$$

3　定理 1 的证明

由线性微分方程的复振荡基本理论可知,方程(2)的所有解为增长级不小于 $\deg Q$ 的超越整函数。事实上,设 $f(z)$ 为方程(2)的解,显然 $f(z)$ 为整函数,并且根据函数级的性质知道 $\sigma(f)\geqslant\sigma(e^Q)=\deg Q$。对于方程(2)的增长级不小于 1 的解 $f(z)$,下面将用反证法证明 f 具有无穷增长级。首先假设 $\sigma(f)<\infty$。

改写(2)为

$$\frac{f^{(k)}}{f}+a_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f}+\cdots+a_1\frac{f'}{f}-(e^Q-h_0)=\frac{1}{f}. \tag{8}$$

根据 Wiman-Valiron 理论[9,12-13], 可知

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{v_f(r)}{z}\right)^k(1+o(1)). \tag{9}$$

其中 $|f(z)|=M(r,f)$, $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$, $E_1\subset(1,\infty)$ 为有限对数测度, $v_f(r)$ 是 f 的中心指标。

根据引理 1,不难看出存在点列 $\{z_n^*=r_n^*\exp(i\theta_n^*)\}$ 满足 $|f(z_n^*)|=M(r_n^*,f)$, $\theta_n^*\in[0,2\pi)$, $r_n^*\notin[0,1]\cup E_1\cup E_2$($E_2$ 如引理 3 中 H 的定义), $r_n^*\to\infty$,

$$\lim_{r_n^*\to\infty}\frac{\ln v_f(r_n^*)}{\ln r_n^*}=\sigma(f).$$

由引理 2, 存在集合 E_3 满足 $\underline{\ln\ \mathrm{dens}}E_3=\delta>0$,使得对于满足 $|z|=r\in E_3$ 的 z,有

$$|h_0(z)|\geqslant M(r,h_0)^\kappa \tag{10}$$

其中 $\kappa>0$ 为常数。

设 $E_4=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[r_n^*,(r_n^*)^{2-\gamma}]$, $\gamma=\delta/2$。根据集合的下对数密度定义,可知

$$\overline{\ln\ \mathrm{dens}}E_4\geqslant\frac{\lambda([r_n^*,(r_n^*)^{2-\gamma}]\cap[1,r])}{\ln r}\geqslant1-\gamma. \tag{11}$$

由上极限和下极限的基本性质,有

$$1\geqslant\overline{\ln\ \mathrm{dens}}E_4+\underline{\ln\ \mathrm{dens}}E_3-\overline{\ln\ \mathrm{dens}}(E_4\cap E_3).$$

可算出 $\overline{\ln\ \mathrm{dens}}(E_4\cap E_3)\geqslant\gamma>0$。从而可以从 $E_3\cup E_4-E_1\cup E_2$ 中取出点列 $\{z_n=r_n\exp(i\theta_n)\}$ 满足 $|f(z_n)|=M(r_n,f)$, $\theta_n\in[0,2\pi)$, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=\theta_0\in[0,2\pi)$,且

$$\lim_{r_n\to\infty}\frac{\ln v_f(r_n)}{\ln r_n}\leqslant\sigma(f)<\infty. \tag{12}$$

由此和式(9)可知,下式成立:

$$(1-o(1))\left(\frac{v_f(r_n)}{r_n}\right)^k\leqslant\left|\frac{f^{(k)}(z_n)}{f(z_n)}+a_{k-1}\frac{f^{(k-1)}(z_n)}{f(z_n)}+\cdots+a_1\frac{f'(z_n)}{f(z_n)}\right|\leqslant k(1+o(1))\left(\frac{v_f(r_n)}{r_n}\right)^k. \tag{13}$$

设 $Q(z)=\sum\limits_{j=0}^{m}(\alpha_j+i\beta_j)z^j$, $\alpha_j,\beta_j(j=1,\cdots,m)$ 均

为实数。令

$$\delta^{j}(Q,\theta)=\alpha_j\cos(j\theta)-\beta_j\sin(j\theta),\ j=1,\cdots,m.$$

对于 θ_0，若 $\delta^{j}(Q,\theta_0)=0(j=1,\cdots,m)$，则 $\mathrm{Re}(Q(r_n e^{i\theta_0}))=\alpha_0$。注意到直线 $\arg z=\theta_0$ 是 $\{r_n e^{i\theta_n}\}$ 的渐近线,因而存在 $M>0$,满足当 $n>M$ 时,有

$$\alpha_0-1<\mathrm{Re}(Q(r_n e^{i\theta_n}))<\alpha_0+1. \tag{14}$$

因为 f 是超越整函数,易知 $M(r,f)\to\infty\ (r\to\infty)$. 由此，将式(9),(10)和(13)代入式(8),故可知当 n 充分大时，有

$$\left(\frac{v_f(r_n)}{r_n}\right)^{k}(1+o(1))\geq|e^{Q}-h_0|\geq M(r_n,h)^{\kappa}(1-o(1)), \tag{15}$$

这与 h_0 超越矛盾。从而可知存在 $j_0(1\leq j_0\leq m)$,使得 $\delta^{j_0}(Q,\theta_0)\neq0$。可找到 j_0 使得满足 $j>j_0$ 的 j,有 $\delta^{j}(Q,\theta_0)\neq0$。那么存在两种情形:(i) $\delta^{j_0}(Q,\theta_0)<0$;(ii) $\delta^{j_0}(Q,\theta_0)>0$。

(i) $\delta^{j_0}(Q,\theta_0)<0$。由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=\theta_0$,可知当 n 充分大时,$\delta^{j_0}(Q,\theta_n)<\frac{1}{2}\delta^{j_0}(Q,\theta_0)<0$,且 $\mathrm{Re}\left(\sum\limits_{j=j_0+1}^{m}(\alpha_j+i\beta_j)z_n^{j}\right)<1$。将式(9)和(13)代入式(8),再由引理4可知,对任意给定的正数 ε，当 n 充分大时,有

$$\left(\frac{v_f(r_n)}{r_n}\right)^{k}(1+o(1))=$$

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\frac{1}{2}\delta^{j_0}(Q,\theta_0)r_n^{j_0}+1\right\}+|h_0|.$$

由于 $\sigma(h_0)<\frac{1}{2}$ 且 $\delta^{j_0}(Q,\theta_0)<0$，根据引理3,从上式可知当 n 充分大时,有

$$v_f(r_n)\geq O(1)r_nM(r_n,h_0)^{\kappa}, \tag{16}$$

这与 h_0 超越矛盾。

(ii) $\delta^{j_0}(Q,\theta_0)>0$。由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=\theta_0$,可知当 n 充分大时,$\frac{1}{2}\delta^{j_0}(Q,\theta_0)<\delta^{j_0}(Q,\theta_n)<\frac{3}{2}\delta^{j_0}(Q,\theta_0)$,且 $\mathrm{Re}\left(\sum\limits_{j=j_0+1}^{m}(\alpha_j+i\beta_j)z_n^{j}\right)<1$。将式(9)和(13)代入式(8),由引理3和引理4可知,对任给的正数 ε,当 n 充分大时,有

$$r_n\exp\left\{\frac{1}{2k}\delta^{j_0}(Q,\theta_0)(1-\varepsilon)r_n^{j_0}\right\}\leq$$

$$v_f(r_n)\leq r_n\exp\left\{\frac{3}{2k}\delta^{j_0}(Q,\theta_0)(1+\varepsilon)r_n^{j_0}\right\}. \tag{17}$$

根据引理2,式(17)显然与 $\sigma(f)<\infty$ 矛盾。

定理1证毕。

4 定理2的证明

首先根据CM公共值的定义和Hadamard分解定理，有

$$\frac{L(f)-a}{f-a}=e^{Q(z)}, \tag{18}$$

其中 $Q(z)$ 为多项式。假设 $Q(z)$ 不为常数,可将式(18)展开为式(2)，利用定理1的结果得到 $\sigma(f)=\infty$ 与条件 $\sigma(f)<\infty$ 矛盾，所以 $Q(z)$ 只可能为常数 b。令 $c=e^{b}$,定理2证毕。

参考文献:

[1] HAYMAN W. Meromorphic function[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] LAINE I. Nevanlinna theory and complex differential equation[M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.

[3] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京：科学出版社, 1982.

[4] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京：科学出版社, 1995.

[5] 吕巍然,王珺. 具有三个公共值亚纯函数惟一性问题的注记[J]. 石油大学学报:自然科学版,2004,28(1):119-121.
LÜ Wei-ran, WANG Jun. Remarks on the problem of uniqueness of meromorphic functions sharing three values [J]. Journal of the University of Petroleum, China (Edition of Naturnal Science), 2004,28(1):119-121.

[6] 张同对,吕巍然. 涉及导数的亚纯函数的惟一性[J]. 中国石油大学学报:自然科学版,2007,31(6):130-134.
ZHANG Tong-dui, LÜ Wei-ran. On uniqueness of derivatives of meromorphic functions[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Naturnal Science), 2007,31(6):130-134.

[7] YANG L Z. Solutions of a differential equation and its application[J]. Kodai Math J, 1999,22:458-464.

[8] 王珺. 关于一类非齐次线性微分方程解的增长性及其应用[J]. 江西师范大学学报,2003,27(2):115-117.
WANG Jun. The growth of solutions of some non-homogeneous linear differential equations and its application[J]. Journal of Jiangxi Normal University, 2003,27(2):115-117.

[9] VALIRON G. Lectures on the General Theory of Integral Functions[M]. New York: Chelsea, 1949.

[10] BARRY P D. On a theorem of Besicovitch[J]. Quart J Math Oxford Ser, 1963,14:293-302.

(下转第174页)

TAN Shang-wang, GUO Ji-ming. The largest eigenvalue on trees [J]. Journal of the University of Petrolum(Edition of Natural Science), China, 2002,26(6):113-117.

[7] 谭尚旺. 给定边独立数的树的谱半径的新上界 [J]. 广西工学院学报, 2008,19(1):13-17.
TAN Shang-wang. On the new upper bounds of spectral radius of trees given edge independence number [J]. Journal of Guangxi Unversity of Technology, 2008, 19(1):13-17.

[8] GUO J M, TAN S W. A conjecture on the second largest eigenvalue of a tree with perfect matchings [J]. Linear Algebra Appl, 2002,347:9-15.

[9] GUO J M, TAN S W. A note on the second largest eigenvalue of a tree with perfect matching [J]. Linear Algebra Appl, 2004,380:125-134.

[10] 谭尚旺, 郭纪明. 树的第二个最大特征值[J]. 数学研究与评论, 2004,24(3):541-548.
TAN Shang-wang, GUO Ji-ming. The second largest eigenvalues of trees [J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2004,24(3):541-548.

[11] TAN Shang-wang, GUO Ji-ming. The second largest eigenvalue of trees [J]. Australasian Journal of Combinatorics, 2006,34:313-320.

[12] SHAO J Y. Bounds on the kth eigenvalues of trees and forests [J]. Linear Algebra Appl, 1991,149:19-34.

(编辑　修荣荣)

(上接第 165 页)

[14] 梅凤翔. 包含伺服约束的非完整系统的 Lie 对称性与守恒量[J]. 物理学报, 2000,49(7):1207-1210.
MEI Feng-xiang. Lie symmetries and conserved quantities of Nonholonomic systems with Servoconstr Aints [J]. Acta Physica Sinica, 2000,49(7):1207-1210.

[15] MEI F X, XU X J, ZHANG Y F. A unified symmetry of Lagrangian systems[J]. Acta Mechanica Sinica, 2004, 20(6):668-671.

[16] WU H B. Lie-form invariance of the Lagrange system [J]. Chinese Physics, 2005,14(3):452-454.

[17] XU X J, QIN M C, MEI F X. Unified symmetry of holonomic mechanical systems [J]. Chinese Physics, 2005,14(7):1287-1289.

[18] 梅凤翔. Lagrange 系统的 Noether-Lie 对称性[J]. 北京理工大学学报, 2005,25(4):283-285.
MEI Feng-xiang. Noether-Lei symmetry of Lagrange system[J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2005,25(4):283-285.

[19] 李元成, 夏丽莉, 赵伟, 等. 机电系统的统一对称性[J]. 物理学报, 2007,56(9):5037-5040.
LI Yuan-cheng, XIA Li-li, ZHAO Wei, et al. Unified symmetry of mechanico-electrical systems [J]. Acta Physica Sinica, 2007,56(9):5037-5040.

[20] XIA L L, LI Y C, HOU Q B, et al. Unified symmetry of nonholonomic mechanical systems with variable mass [J]. Chinese Physics, 2006,15(5):903-906.

[21] 董文山. 非完整力学系统的高阶 Routh 方程及其正则形式[J]. 中国石油大学学报: 自然科学版, 2008, 32(3):165-168.
DONG Wen-shan. Higher order Routh equations of a non-holonomic mechanical system and its canonical form [J]. Journal of China University of Petroleum(Edition of Natural Science), 2008,32(3):165-168.

(编辑　修荣荣)

(上接第 168 页)

[11] CHEN Z X. The zero, pole and order of meromorphic solutions of differential equations with meromorphic coefficients[J]. Kodai Math J, 1996,19:341-354.

[12] HAYMAN W. The local growth of power series: a survey of the Wiman-Valiron method [J]. Canad Math Bull, 1974,17:317-358.

[13] 何育赞, 肖修治. 代数体函数与常微分方程[M]. 北京: 科学出版社, 1988.

(编辑　修荣荣)