

文章编号:1673-5005(2010)02-0163-03

包含伺服约束非完整系统的 Noether-Mei 对称性

王小明¹, 李元成¹, 张佩玲², 荆宏星¹

(1. 中国石油大学 物理科学与技术学院, 山东 东营 257061; 2. 北京国电清新环保技术股份有限公司, 北京 100036)

摘要:根据系统的运动微分方程, 给出伺服约束非完整系统的新对称性的定义和判据, 得到了系统的 Noether-Mei 对称性导出的 Noether 守恒量和 Mei 守恒量。举例说明结果的应用。

关键词:伺服约束; 非完整系统; Noether-Mei 对称性; 守恒量

中图分类号: O 313 **文献标志码:** A **doi:**10.3969/j.issn.1673-5005.2010.02.033

Noether-Mei symmetry of nonholonomic systems with servoconstraints

WANG Xiao-ming¹, LI Yuan-cheng¹, ZHANG Pei-ling², JING Hong-xing¹

(1. College of Physics Science and Technology in China University of Petroleum, Dongying 257061, China;

2. Beijing SPC Environment Protection Tech Co., LTD, Beijing 100036, China)

Abstract: The definition and the criterion of a Noether-Mei symmetry for the nonholonomic systems with servoconstraints, as well as the Noether conserved quantity and the Mei conserved quantity deduced from the Noether-Mei symmetry for the system were given. An example was given to illustrate the application of the results.

Key words: servoconstraints; nonholonomic systems; Noether-Mei symmetry; conserved quantity

力学系统的对称性与守恒量的研究在数学、物理学和物理学上都具有重要的意义。近代寻求守恒量的对称性方法主要有 Noether 对称性^[1-3], Lie 对称性^[2,4]和 Mei 对称性^[5-10]。相应的守恒量有 Noether 守恒量^[1-3], Hojman 守恒量^[11,12]和 Mei 守恒量^[13]。近几年对力学系统对称性与守恒量的研究取得了很大进展。Mei 研究了包含伺服约束非完整系统的 Lie 对称性与守恒量^[14,21]以及 Lagrange 系统的统一对称性^[15], 最近, 梅凤翔、吴惠彬等研究了各种力学系统的联合对称性和统一对称性^[16-20]。笔者研究包含伺服约束非完整系统的 Noether-Mei 对称性, 给出系统的 Noether-Mei 对称性的定义和判据, 并由此找到系统的 Noether 守恒量和 Mei 守恒量。

1 系统的运动微分方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s (s=1, \dots, n)$ 确定, 并受到通常的理想双面 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t, q, \dot{q}) = 0, \beta = 1, \dots, g, \quad (1)$$

以及 r 个伺服约束: n_1 个完整约束及 $n_2 (n_2 = r - n_1)$ 个非完整约束

$$\varphi_\alpha(t, q) = 0, \psi_{n_1+r}(t, q, \dot{q}) = 0, \alpha = 1, \dots, n_1; r = 1, \dots, n_2. \quad (2)$$

称方程(1)为第一类约束, 方程(2)为第二类约束。对第一类约束, 由 Appell-Chetaev 定义, 有

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s = 0, \beta = 1, \dots, g. \quad (3)$$

第一类约束反力的虚功之和为零, 但第二类约束反力的虚功一般异于零。在为第一类约束所允许的虚位移中间, 存在一些使第二类约束反力在其上作功为零的虚位移, 设这些虚位移满足 j 个关系

$$A_\nu \delta q_s = 0, \nu = 1, \dots, j. \quad (4)$$

系统的运动微分方程为

$$E_s(L) = Q_s + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} + u_k A_{ks}, s = 1, \dots, n. \quad (5)$$

其中

$$L = T - V, E_s = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s}.$$

收稿日期:2009-05-13

作者简介:王小明(1979-),女(蒙古族),内蒙古人,讲师,硕士,主要从事理论力学方面的研究。

式中, L 为 Lagrange 函数; Q_i 为非势广义力; λ_β, u_k 为不定乘子; E_i 为 Euler 算子。

当 $r=j$ 时, 方程(5)联同方程(1), (2)组成为确定 $n+g+r$ 个变量 $q_1, \dots, q_n, \lambda_1, \dots, \lambda_g, u_1, \dots, u_r$ 的 $n+g+r$ 个方程。在非奇异的假设下, 展开方程(5), 可求得所有广义加速度, 记作

$$\ddot{q}_s = H_s(t, q, \dot{q}, \lambda, u), \quad s=1, \dots, n. \quad (6)$$

将方程(1)和方程(2)中的第二式对 t 求一阶导数, 并将方程(2)中的第一式对 t 求二阶导数, 可得到包含对 $\ddot{q}_s$ 为线性的 $g+r$ 个方程, 再将式(6)代入这 $g+r$ 个方程, 并消去 $\ddot{q}_s$, 可得 $g+r$ 个乘子 λ_β 和 u_k 的一组代数方程, 解此代数方程, 可得

$$\lambda_\beta = \lambda_\beta(t, q, \dot{q}), \quad u_k = u_k(t, q, \dot{q}). \quad (7)$$

将式(7)代入方程(6), 可求得所有广义加速度, 记作

$$\ddot{q}_s = h_s(t, q, \dot{q}), \quad s=1, \dots, n. \quad (8)$$

方程(7)为非完整系统(1), (2), (5)相应的完整系统的运动方程。

2 系统的 Noether-Mei 对称性的定义和判据

定义 如果包含伺服约束的非完整系统的对称性既是 Noether 对称性又是 Mei 对称性, 则称该对称性为系统的 Noether-Mei 对称性。

引入时间和广义坐标的无限小变换

$$t^* = t + \varepsilon \xi_0(t, q, \dot{q}), \quad q_i^*(t^*) = q_i(t) + \varepsilon \xi_i(t, q, \dot{q}), \quad s=1, \dots, n, \quad (9)$$

式中, ε 为无限小参数; ξ_0 和 ξ_i 均为无限小生成元。

约束方程(1), (2)在无限小变换下的不变性为

$$X^{(1)}(f_\beta) = 0, \quad (10)$$

$$X^{(0)}(\varphi_\alpha) = 0, \quad (11)$$

$$X^{(1)}(\psi_{n_1+r}) = 0. \quad (12)$$

对包含伺服约束的非完整系统, Noether 等式为

$$L \frac{\bar{d}}{dt} \xi_0 + X^{(1)}(L) + (Q_s + A_s)(\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + \frac{\bar{d}}{dt} G_N = 0. \quad (13)$$

其中

$$A_s = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} + u_k A_k.$$

Mei 对称性的判据方程为

$$\bar{E}_s \{X^{(1)}(L)\} = X^{(1)}(Q_s) + X^{(1)}(A_s), \quad (14)$$

其中

$$\begin{cases} X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s}, \\ X^{(1)} = X^{(0)} + \left(\frac{\bar{d}}{dt} \xi_s - \dot{q}_s \frac{\bar{d}}{dt} \xi_0 \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \\ \frac{\bar{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s \frac{\partial}{\partial q_s} + h_s \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}, \\ \bar{E}_s = \frac{\bar{d}}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s}. \end{cases}$$

判据 对于伺服约束非完整系统, 如果存在规范函数 $G_N = G_N(t, q, \dot{q})$, 无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足等式(10)~(12)和

$$\left[L \frac{\bar{d}}{dt} \xi_0 + X^{(1)}(L) + (Q_s + A_s)(\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + \frac{\bar{d}}{dt} G_N \right]^2 + \{ \bar{E}_s [X^{(1)}(L)] - X^{(1)}(Q_s) - X^{(1)}(A_s) \}^2 = 0, \quad (15)$$

则相应对称性为伺服约束非完整系统的 Noether-Mei 对称性。

3 系统的 Noether-Mei 对称性导致的守恒量

伺服约束非完整系统的 Noether-Mei 对称性在一定条件下可导出 Noether 守恒量和 Mei 守恒量。

命题 1 对于伺服约束非完整系统, Noether-Mei 对称性可导致 Noether 守恒量

$$I_N = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + G_N = \text{const}. \quad (16)$$

证明 因为伺服约束非完整系统的 Noether-Mei 对称性一定是 Noether 对称性, 则存在一个规范函数 $G_N = G_N(t, q, \dot{q})$ 满足 Noether 等式(13), 根据判据系统存在守恒量(16)。

命题 2 对于伺服约束非完整系统, 如果存在规范函数 $G_M = G_M(t, q, \dot{q})$, 满足方程

$$X^{(1)}(L) \frac{\bar{d}}{dt} \xi_0 + X^{(1)}[X^{(1)}(L)] + X^{(1)}(Q_s + A_s)(\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + \frac{\bar{d}}{dt} G_M = 0, \quad (17)$$

则系统 Noether-Mei 对称性可导致 Mei 守恒量

$$I_M = X^{(1)}(L)\xi_0 + \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + G_M = \text{const}. \quad (18)$$

证明 因为伺服约束非完整系统的 Noether-Mei 对称性一定是 Mei 对称性, 则系统的 Mei 对称性判据方程(14)成立, 利用式(14), (17)能够证明系统存在 Mei 守恒量(18)。

4 说明性例子

一质量平面 P 可在一水平固定面 oxy 上平动地

滑动。在平面 P 上有一半半径为 R , 质量为 M 的均质圆球可无滑动地滚动。平面 P 的运动用伺服装置自动地调节, 以使球心以角速度 ω 相对固定轴 oz 匀速转动, 研究此伺服约束系统的 Noether-Mei 对称性与守恒量。

首先写出系统的运动微分方程。设 u, v 为平面 P 上的一点 A 相对轴 ox, oy 的坐标。平面的位置由这两个参数确定。设 ξ, η 为球心 G 的前两个坐标, p, q, r 为球的瞬时角速度在轴 ox, oy, oz 上的投影, ψ, θ, φ 为 Euler 角, 有

$$p = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi,$$

$$q = \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi,$$

$$r = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta.$$

球沿平面 P 无滑动地滚动的非完整约束条件为

$$\dot{\xi} - qR = u, \quad \dot{\eta} + pR = v,$$

伺服约束为

$$\dot{\xi} + \omega \eta = 0, \quad \dot{\eta} - \omega \xi = 0.$$

使第二类约束反力所做的功为零的虚位移为

$$\delta u = 0, \delta v = 0,$$

进而有

$$\delta \xi - R(\delta \theta \sin \psi - \delta \varphi \sin \theta \cos \psi) = \delta u = 0,$$

$$\delta \eta - R(\delta \theta \cos \psi + \delta \varphi \sin \theta \sin \psi) = \delta v = 0.$$

球的动能表示为

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{5} M R^2 (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 +$$

$$2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta).$$

令 $q_1 = \xi, q_2 = \eta, q_3 = \psi, q_4 = \theta, q_5 = \varphi$, 取无限小生成元:

$$\xi_3 = 1, \xi_0 = \xi_1 = \xi_2 = \xi_4 = \xi_5 = 0. \quad (19)$$

生成元(19)满足式(15), 可知生成元(19)是包含伺服约束非完整系统的 Noether-Mei 对称性。

将式(19)代入式(13)有规范函数

$$G_N = 0, \quad (20)$$

由命题 1 得由系统 Noether-Mei 对称性导致的 Noether 守恒量为

$$I_N = \frac{2}{5} M R^2 \dot{\psi} = \text{const}. \quad (21)$$

将式(19)代入式(17), 有

$$G_M = q_3 + q_5 \cos q_4. \quad (22)$$

由命题 2 得

$$I_M = q_3 + q_5 \cos q_4 = \text{const}. \quad (23)$$

I_M 即为由系统的 Noether-Mei 对称性得到的 Mei 守恒量。

参考文献:

- [1] 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1993.
- [2] 赵跃宇, 梅凤翔. 力学系统的对称性与不变量[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [3] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [4] 梅凤翔. 具有可积微分约束的力学系统的 Lie 对称性[J]. 力学学报, 2000, 32(4): 466-472.
MEI Feng-xiang. Lie symmetries of mechanical system with integral differential constraints[J]. Acta Mechanica Sinica, 2000, 32(4): 466-472.
- [5] MEI F X, ZHU H P. Lie symmetries and conserved quantities for the singular Lagrange system[J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2000, 9(1): 11-14.
- [6] 梅凤翔. 关于 Noether 对称性、Lie 对称性和形式不变性[J]. 北京理工大学学报, 2001, 21(4): 535-536.
MEI Feng-xiang. On Noether symmetry. Lie symmetry and form invariance[J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2001, 21(4): 535-536.
- [7] MEI F X. Form invariance of Appell equations[J]. Chinese Physics, 2001, 10(3): 177-180.
- [8] WANG S Y, MEI F X. On the form invariance of Nielsen equations[J]. Chinese Physics, 2001, 10(5): 373-375.
- [9] WANG S Y, MEI F X. Form invariance and Lie symmetry of equations of non-holonomic systems[J]. Chinese Physics, 2002, 11(1): 5-8.
- [10] ZHANG Y, MEI F X. Form invariance for systems of generalized classical mechanics[J]. Chinese Physics, 2003, 12(10): 1058-1061.
- [11] HOJMAN S A. A new conservation law constructed without using either Lagrangians or Hamiltonians[J]. J Phys A: Math Gen, 1992, 25: L291-L295.
- [12] 张宏彬, 陈立群, 刘荣万, 等. 广义 Hojman 定理[J]. 物理学报, 2005, 54(6): 2489-2493.
ZHANG Hong-bin, CHEN Li-qun, LIU Rong-wan, et al. The generalized Hojman's theorem[J]. Acta Physica Sinica, 2005, 54(6): 2489-2493.
- [13] 王树勇, 尚玫, 梅凤翔. 完整力学系统的形式不变性与非 Noether 守恒量[J]. 北京理工大学学报, 2003, 23(3): 271-273.
WANG Shu-yong, SHANG Mei, MEI Feng-xiang. Form invariance and non-Noether conserved quantity of holonomic mechanical system[J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2003, 23(3): 271-273.

(下转第 174 页)

- TAN Shang-wang, GUO Ji-ming. The largest eigenvalue on trees [J]. Journal of the University of Petroleum (Edition of Natural Science), China, 2002, 26(6): 113-117.
- [7] 谭尚旺. 给定边独立数的树的谱半径的新上界 [J]. 广西工学院学报, 2008, 19(1): 13-17.
- TAN Shang-wang. On the new upper bounds of spectral radius of trees given edge independence number [J]. Journal of Guangxi University of Technology, 2008, 19(1): 13-17.
- [8] GUO J M, TAN S W. A conjecture on the second largest eigenvalue of a tree with perfect matchings [J]. Linear Algebra Appl, 2002, 347: 9-15.
- [9] GUO J M, TAN S W. A note on the second largest eigenvalue of a tree with perfect matching [J]. Linear Algebra Appl, 2004, 380: 125-134.
- [10] 谭尚旺, 郭纪明. 树的第二个最大特征值 [J]. 数学研究与评论, 2004, 24(3): 541-548.
- TAN Shang-wang, GUO Ji-ming. The second largest eigenvalues of trees [J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2004, 24(3): 541-548.
- [11] TAN Shang-wang, GUO Ji-ming. The second largest eigenvalue of trees [J]. Australasian Journal of Combinatorics, 2006, 34: 313-320.
- [12] SHAO J Y. Bounds on the k th eigenvalues of trees and forests [J]. Linear Algebra Appl, 1991, 149: 19-34.

(编辑 修荣荣)

(上接第 165 页)

- [14] 梅凤翔. 包含伺服约束的非完整系统的 Lie 对称性与守恒量 [J]. 物理学报, 2000, 49(7): 1207-1210.
- MEI Feng-xiang. Lie symmetries and conserved quantities of Nonholonomic systems with Servoconstraints [J]. Acta Physica Sinica, 2000, 49(7): 1207-1210.
- [15] MEI F X, XU X J, ZHANG Y F. A unified symmetry of Lagrangian systems [J]. Acta Mechanica Sinica, 2004, 20(6): 668-671.
- [16] WU H B. Lie-form invariance of the Lagrange system [J]. Chinese Physics, 2005, 14(3): 452-454.
- [17] XU X J, QIN M C, MEI F X. Unified symmetry of holonomic mechanical systems [J]. Chinese Physics, 2005, 14(7): 1287-1289.
- [18] 梅凤翔. Lagrange 系统的 Noether-Lie 对称性 [J]. 北京理工大学学报, 2005, 25(4): 283-285.
- MEI Feng-xiang. Noether-Lie symmetry of Lagrange system [J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2005, 25(4): 283-285.
- [19] 李元成, 夏丽莉, 赵伟, 等. 机电系统的统一对称性 [J]. 物理学报, 2007, 56(9): 5037-5040.
- LI Yuan-cheng, XIA Li-li, ZHAO Wei, et al. Unified symmetry of mechanico-electrical systems [J]. Acta Physica Sinica, 2007, 56(9): 5037-5040.
- [20] XIA L L, LI Y C, HOU Q B, et al. Unified symmetry of nonholonomic mechanical systems with variable mass [J]. Chinese Physics, 2006, 15(5): 903-906.
- [21] 董文山. 非完整力学系统的高阶 Routh 方程及其正则形式 [J]. 中国石油大学学报: 自然科学版, 2008, 32(3): 165-168.
- DONG Wen-shan. Higher order Routh equations of a non-holonomic mechanical system and its canonical form [J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2008, 32(3): 165-168.

(编辑 修荣荣)

(上接第 168 页)

- [11] CHEN Z X. The zero, pole and order of meromorphic solutions of differential equations with meromorphic coefficients [J]. Kodai Math J, 1996, 19: 341-354.
- [12] HAYMAN W. The local growth of power series; a survey of the Wiman-Valiron method [J]. Canad Math Bull, 1974, 17: 317-358.
- [13] 何育赞, 肖修治. 代数体函数与常微分方程 [M]. 北京: 科学出版社, 1988.

(编辑 修荣荣)