

文章编号:1673-5005(2010)02-0119-06

近底床悬跨海管安全跨长的预测

李 磊, 曹玉龙, 林 缅

(中国科学院 力学研究所环境力学重点实验室, 北京 100190)

摘要:由修正势流理论获得了海管沿轴向升力分布,运用海管的小挠度微分方程,通过有限元计算得到有混凝土配重海管的平衡位移和应力,分析跨肩约束、混凝土刚度和来流速度对最大位移和最大应力的影响,讨论悬跨长度增加时刚度失效和强度失效的行为规律,给出不同跨肩约束条件下随间隙比和来流速度变化的安全跨长分区图。结果表明:悬跨海管首先出现刚度失效,触底后则会发生强度失效;间隙比和跨肩约束是影响安全跨长的重要因素;来流速度小时,必须考虑海管的静态临界安全跨长。

关键词:悬跨海管;修正势流法;升力系数;安全跨长;分区图

中图分类号:P 756.2

文献标志码:A

doi:10.3969/j.issn.1673-5005.2010.02.024

Prediction on safety length of free spanning pipeline near seabed

LI Lei, CAO Yu-long, LIN Mian

(Key Laboratory of Environment Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: Applying the lift force distribution along a free spanning pipeline near seabed obtained by the modified potential method, the displacements and stresses of the pipeline with steel-concrete structure were investigated by the pipe dynamics equation. Using the finite element analysis and iterative method, the effects of concrete stiffness, constraints in span shoulders and current velocity on the maximal displacement and stress were analyzed. The stiffness failure and strength failure were discussed when the spanning lengths extend. The safety lengths zone schemes were drawn under different gap ratios and current velocities. The results suggest that the stiffness failure takes place first when the spanning length increases and the strength failure then may occur after the pipeline touching seabed. The gap ratios and constraints at the span shoulders are important factors in the allowable spanning length. The static critical allowable length should be considered firstly when the current velocity is relatively small.

Key words: free spanning pipeline; modified potential method; lift coefficient; safety length; partition diagram

在评定海管悬跨段安全性中,对流体载荷的处理往往直接采用立管模型^[1-3]。立管模型的缺点就是没有考虑底床对海管受力的影响。Lei C 等^[4]曾在近壁面圆柱绕流实验中发现,圆柱受到的流体力与距离壁面的尺寸有明显的相关性。远离壁面($e/D < 0.6$)圆柱在逐渐向壁面靠近时,受到的阻力会减小,而升力会增大,而且升力的变化及其对结构物受力状态的影响更为明显。基于这一认识,有人考虑了海底地形存在对近底床结构物的水动力影

响^[5,6];Lam 等^[6]在计算海管稳定性时考虑了底床存在所引起的负向升力,但其采用的是传统势流理论计算升力,其量值比实验结果^[4,7-8]要高出两个量级,无法正确预估海管的安全状况。因此,笔者运用修正势流理论得到与实验结果吻合的近底床海管升力系数,而后通过有限元计算,分析海流速度、端部约束条件以及悬跨高度对海管位移、应力的影响,并得到安全跨长分区图。

收稿日期:2009-08-22

基金项目:国家“863”目标导向项目(2006AA09Z301);国家自然科学基金项目(40776057);中国科学院知识创新工程重要方向项目(KZCX2-YW-212-2)

作者简介:李磊(1983-),男(汉族),山东惠民人,博士研究生,主要从事海洋工程研究。

1 海管悬跨模型

1.1 模型描述

假设悬跨海管与底床的初始间隙为 e_0 , 悬跨长度为 L , 垂直于管轴线的均匀流流速为 U (图 1(a))。海管为钢管-混凝土双层结构, 混凝土为配重层, 附着于钢管外壁, 外径为 D ; 内层钢管外径为 D_i , 钢管厚度为 t_s (图 1(b))。在海流作用下, 海管主要受到升力、重力、浮力和自身弹性恢复力的作用, 本文中应用 Euler-Bernoulli 梁模型建立海管的微分方程为

$$EI \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} = \rho A g - m g + f(x). \quad (1)$$

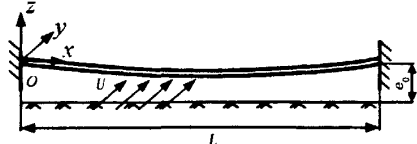
其中

$$I = \frac{\pi}{64} [D^4 - (D_i - 2t_s)^4],$$

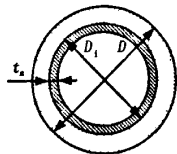
$$m = \frac{\pi}{4} \rho_c (D^2 - D_i^2) + \frac{\pi}{4} \rho_s [D_i^2 - (D_i - 2t_s)^2],$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \rho C_L(x) D U^2.$$

式中, $w(x)$ 为挠度, m ; ρ 为管外流体密度, kg/m^3 ; E 为弹性模量, Pa ; I 为惯性矩, m^4 ; m 为海管单位长质量, $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$; ρ_s, ρ_c, ρ_o 分别为钢管、混凝土、管内输送流体的密度, $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$; A 为横截面积; g 为重力加速度, $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; f 为海管单位长升力, $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$; $C_L(x)$ 为升力系数。



(a) 海管悬跨



(b) 钢管-混凝土管道截面

图 1 海管模型

Fig. 1 Submarine pipeline model

考虑 3 种约束情况: 固支、简支和扭转弹性约束。固支时, 边界条件为

$$\begin{cases} w(0) = w(L) = 0, \\ \left. \frac{\partial w(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial w(x)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0; \end{cases}$$

简支时, 边界条件为

$$\begin{cases} w(0) = w(L) = 0, \\ \left. \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0; \end{cases}$$

扭转弹性约束时, 边界条件为

$$\begin{cases} w(0) = w(L) = 0, \\ \left. EI \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = k \left. \frac{\partial w(x)}{\partial x} \right|_{x=0}, \\ \left. EI \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \right|_{x=L} = -k \left. \frac{\partial w(x)}{\partial x} \right|_{x=L}. \end{cases}$$

式中, 扭转弹性系数 k 表征跨肩海洋土体抵抗扭转的能力, $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$ 。

1.2 升力系数的计算

通常工程实际中海管附近流动工况的雷诺数为 10^6 量级。此时绕流场的展向相关性较弱, 故本文中采用条带法将海管沿轴向做均匀切片处理。基于修正势流法求得每一断面上的升力, 然后积分得到整个海管悬跨段沿轴向升力分布。

所谓修正势流法是将流场处理成 3 部分的叠加, 计算域内的流函数 ψ 可写为

$$\psi = \psi_0 + \psi_i + \psi_v. \quad (2)$$

式中, ψ_0 为无底床均匀来流绕海管流动的流函数; ψ_i (i 个偶极子模拟底床形状) 为有底床流动的流函数; ψ_v 为流体黏性影响施加的点涡流函数, 该流函数修正了传统势流忽略流体黏性所引起的升力计算误差。同时, 流场还须满足底床和海管外边界均为流线, 以及尾迹修正条件海管表面上下缘速度相等^[8], 即

$$U_{\text{top}} = U_{\text{bottom}}. \quad (3)$$

对复势微分得到势流速度场^[9]。

对于无黏正压流体的定常运动, Bernoulli 方程沿流线成立, 即

$$p + 0.5 \rho v^2 + \rho g z = C(\psi). \quad (4)$$

式中, p 为压力, Pa ; $0.5 \rho v^2$ 为流体的动压作用项; $\rho g z$ 为流体的静压作用项; $C(\psi)$ 为随流线不同而变化的参数。

设无穷远处的压力为零, 可求得该流线对应的 $C(\psi)$ 。根据式(2)和式(3)得到海管附近流体速度场, 由式(4)可求得周向的压强分布, 对其竖向分量积分便得到升力

$$C_L = \frac{1}{\rho U^2} \int_0^{2\pi} -p \sin \theta d\theta. \quad (5)$$

运用该方法得到升力系数随间隙比的函数关系为

$$C_L(x) = 1.1 \exp(-3.4 e_0/D). \quad (6)$$

图 2 为修正势流方法所得升力与实验升力的对比。从图 2 可以看出, 由修正势流方法计算的结果与实验结果^[4,7] 非常接近。

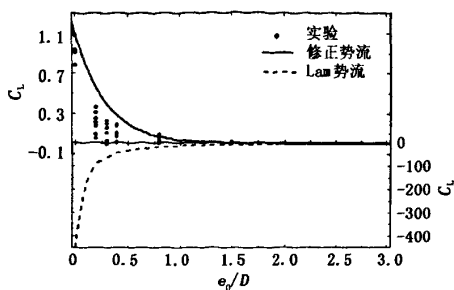


图 2 修正势流升力系数

Fig. 2 Life force coefficients by modified potential method

1.3 方程求解

为求解微分方程(1),将模型离散,得到单元的平衡方程^[10]为

$$[K]^e[\delta] = [f]. \quad (7)$$

其中

$$[\delta]^T = [w_i, \theta_i, w_j, \theta_j]^T,$$

$$[K]^e = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ & & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \end{bmatrix}.$$

式中, $[\delta]$ 为节点位移向量; $[f]$ 为单元节点载荷向量; $[K]^e$ 为单元刚度矩阵。将单元离散方程按单元顺序叠加,得到整体的离散方程为

$$[K][\Delta] = [F]. \quad (8)$$

式中, $[F]$ 为节点载荷向量; $[\Delta]$ 为节点位移向量; $[K]$ 为由单元刚度矩阵叠加得到的整体刚度矩阵。

由于式(1)是非线性方程,需迭代求解,其收敛条件为

$$\sqrt{\sum_{i=1}^N [w(i)^{n+1} - w(i)^n]^2} \leq \varepsilon. \quad (9)$$

式中, N 为模型的单元数; $w(i)^n$ 为第*i*个节点在第*n*迭代步的位移; ε 为小量,用于控制收敛。

求解流程如图3所示。假设海床

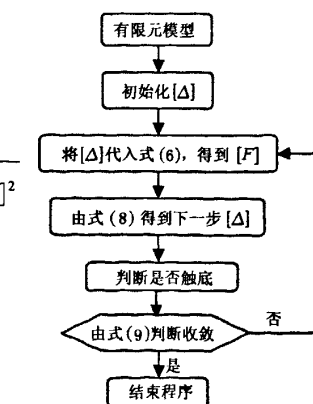


图 3 悬跨海管位移求解流程

Fig. 3 Flow chart of solving spanning pipelines displacement

为刚性平底床,水流对底床没有冲刷。海管与底床接触的相互作用过程如下:当计算中 $w(i)^n > e_0$ 则表示海管已接触到底床,此时底床被处理为刚体壁面,其作用是限制触底段的节点位移为一有限值,此时这些节点上的载荷是间隙比为零时的流体载荷;然后进行下一步迭代计算。当迭代收敛、海管达到平衡后,由挠度与截面最大拉应力的关系得到海管的拉应力^[10]。

1.4 模型验证

目前,工程上常用美国矿产管理局(MMS)提出的CAM(combined analysis method)方法计算海管临界跨长。CAM方法是从强度失效的角度计算临界跨长,在静载计算时该方法没有考虑底床的影响。当初始间隙比 $e_0/D > 1.5$ 时,升力系数近似为零,此时的载荷条件与CAM方法中规定一致。为了验证本文模型的准确性,将海管的初始间隙比设置为 $e_0/D = 10$,配重层外径和钢管外径分别为1和0.8 m,钢的弹性模量 E 为211 GPa,钢和混凝土的密度分别为7 800和2 400 kg/m³。

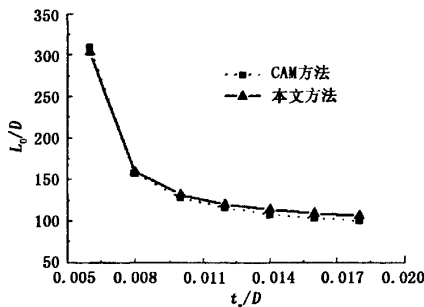


图 4 临界安全跨长随钢管壁厚的变化

Fig. 4 Variation of critical safety length with steel thickness

图4显示的是悬跨海管的临界跨长随钢管壁厚的变化。由图4可以看出本文的计算结果与CAM方法所得结果较为接近,由此验证了本文计算模型的正确性。

2 算例分析

2.1 海管变形与应力

由修正势流法和传统势流理论所计算的升力系数相差两个量级,由此差异带来的海管位移和应力分布的计算参数分别为跨长 $L = 40$ m,初始间隙 $e_0 = 0.3$ m,钢管壁厚 $t_s = 0.012$ m,海流速度 $U = 0.5$ m/s($[\sigma]$ 为材料性质, $[W] = 0.004L$ 为海管工程标准)。

图5为海管横向位移及截面最大拉应力沿轴向分布。其中拉应力正值表示该截面上的最大拉应力出现在截面上方,反之,则出现在截面下方。由图5可以看出,势流理论的结果普遍比修正势流法的大很多。由势流理论得到的中点挠度($|w_{L/2}|/[W] = 0.52$)是修正势流法结果($|w_{L/2}|/[W] = 0.17$)的3倍多;同样由两种方法得到的跨中最大弯曲拉应力也相差3倍之多。可见势流理论得到结果远远高估了海管实际的承载状况。

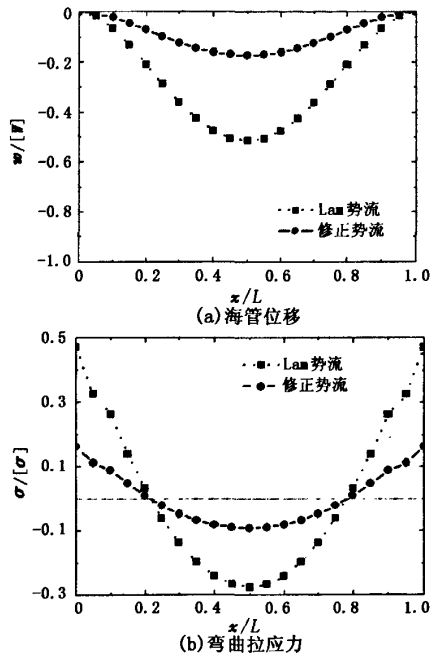


图5 海管位移及海管弯曲拉应力沿轴向分布
Fig.5 Displacement and bending tension stress distribution of pipeline in axial direction

2.2 混凝土刚度的影响

DNV 等海管设计规范中考虑到钢管刚度比混凝土层的刚度大一个量级,通常忽略混凝土层的抗弯性能。实际上混凝土厚度比钢管大一个量级,所以混凝土配重层刚度的影响也是不可忽略的。以跨长 $L = 20$ m 的悬跨海管为例进行讨论。

图6比较了有无混凝土的情况。由图6可以看出,不考虑混凝土刚度时海管最大挠度是0.05,而考虑了混凝土刚度之后最大挠度则要小,约为0.02。最大拉应力也是如此。这说明不考虑混凝土刚度而只计其质量的算法会高估海管的整体挠曲和应力水平,是一种偏于安全的做法。为了得到更接近于实际的海管受力变形状态,混凝土的刚度是不能忽略的。

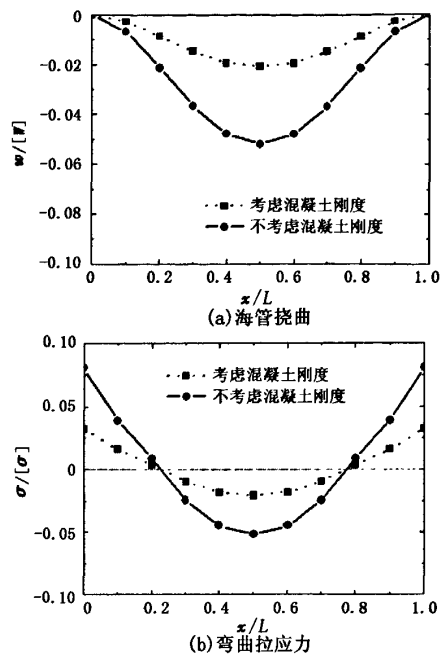


图6 混凝土刚度对海管挠曲及海管弯曲拉应力的影响

Fig.6 Effects of concrete stiffness on flexure and bending tension stress of pipelines

2.3 来流速度的影响

海流速度影响到海管的升力,最终影响到变形和应力的分布。本算例中海管的直径、初始间隙比不变。图7表示 $e_0/D = 0.3$ 时悬跨段上最大位移和最大拉应力随流速的变化。当流速从0增加到1.2 m/s时,海管的最大位移减小了6.2%,最大拉应力减小了5.9%。所以,在初始间隙比不变时,位移和应力均随流速的增大而略有减小。但需注意的是,实际中海管除了受到垂向流体升力外,还受到流向阻力作用。当流速增大时,阻力增大,这必然会增加海管的载荷,所以上述结论只限于不考虑流向阻力的情况。

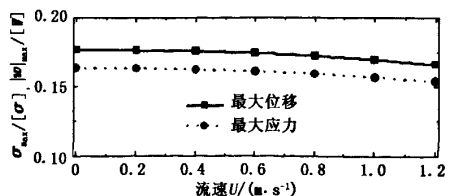


图7 海管最大位移、最大拉应力随流速的变化
Fig.7 Variation of maximal displacements and stress with current velocity

2.4 约束形式的影响

在实际工程中悬跨海管的约束形式有多种,这

里讨论几种典型情况。图 8 表示不同约束条件下海管位移的轴向分布。两端固支时,约束刚性最大,此时海管最大位移最小;随着刚度减小,位移逐渐增大;直至简支时,无扭转约束刚度,位移达到最大,是固支的 5.0 倍。这表明海管两端的支撑形式对位移极值有很大影响。

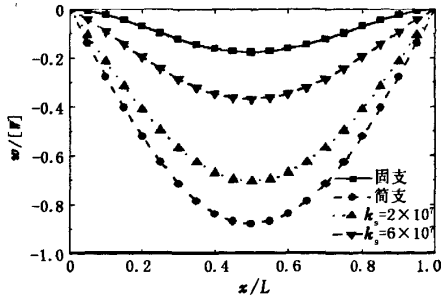


图 8 不同约束条件下海管位移的轴向分布
Fig.8 Axial displacement distribution under different constraints

2.5 悬跨海管的失效行为

静载条件下,判断悬跨海管失效的准则有:

- (1) 刚度准则。若 $|w|_{\max}/[W] < 1$, 则海管处于正常运行状态。
- (2) 强度准则。若 $\sigma_{\max}/[\sigma] < 1$, 则海管处于安全运行状态。

当海管不满足上述条件中任意一个时都被认为处于危险状态,而且后者用于判断海管是否安全运行。因此,可以通过计算海管位移和应力随跨长的变化,根据失效条件分别找到海管发生刚度失效和强度失效时所对应的跨长,考察不同条件下海管的具体失效行为,即可得到海管的安全跨长区间。

以 $U = 0.3 \text{ m/s}$ 和 $e_0/D = 0.3$ 时悬跨海管为例。图 9 为简支条件下海管无量纲最大位移 $|w|_{\max}/[W]$ 和最大拉应力 $\sigma_{\max}/[\sigma]$ 随跨长变化曲线。当跨长从 20 m 开始增加时,最大位移和应力都开始增加,并且位移增加速度比拉应力的大。当跨长增加到 42 m 时,海管达到刚度失效。当悬跨长度 $L = 50 \text{ m}$ 时,此时海管接触底床, $|w|_{\max}/[W]$ 将不再增加,但是海管的 $\sigma_{\max}/[\sigma]$ 会出现挠度最大的触底段与悬跨段的交界处(图 10)。当跨长继续增加至 60.5 m 时,海管达到强度失效。由此给出该条件下简支海管的刚度失效临界跨长为 42 m,强度失效范围是跨长大于 60.5 m。

端部约束为固支条件时海管无量纲最大位移和应力随跨长变化见图 11。当跨长从 20 m 开始增加

时,位移和应力都开始增加。与简支情况有所不同的是,此时应力数值大于位移。当跨长增至 36 m 时,二者恰好相等。此后, $|w|_{\max}/[W]$ 随跨长的增加速度比拉应力的快。当跨长达到 71 m 时,海管发生刚度失效。当悬跨长度继续增加到 72 m 时,海管触底,最大位移不再增加。随着跨长的继续增大, $|w|_{\max}/[W]$ 减小,当跨长 $L = 75 \text{ m}$ 时, $|w|_{\max}/[W] = 1$, 此时海管重新回到安全状态。值得注意的是, $\sigma_{\max}/[\sigma]$ 始终是随着跨长的增加而增加。当跨长 $L = 93.5 \text{ m}$ 时,海管发生强度失效。与简支相比,固支海管的安全跨长区间要大得多。由此可知,海管的约束形式直接影响着其安全跨长区间。

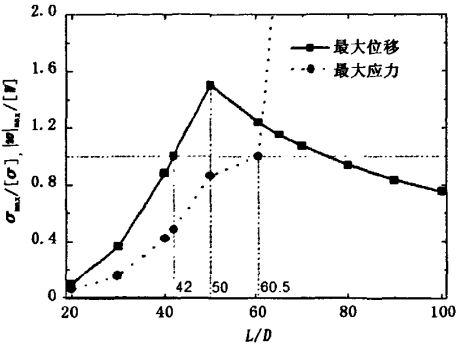


图 9 简支条件下海管失效形式的判定
Fig.9 Assessment of failure style for a pinned-pinned pipeline

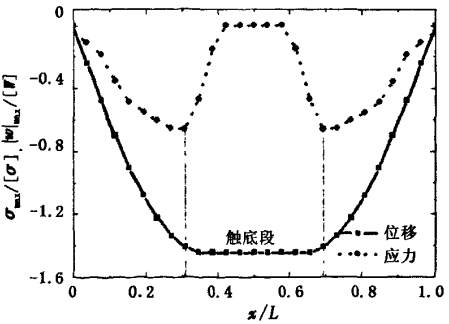


图 10 某一简支海管触底后位移、拉应力轴向分布

Fig.10 Displacement and tension stress distribution of a pinned-pinned pipeline after grounding

2.6 海管安全跨长分区图

考虑到一般海况下海管承载的流速和间隙比范围,计算参数取为: $0 < U < 1.5 \text{ m/s}$, $0.3 \leq e_0/D \leq 0.7$ 。另外,由于扭转弹性约束下的位移和应力都在简支和固支之间,所以这里只考察简支和固支两种约束形式。

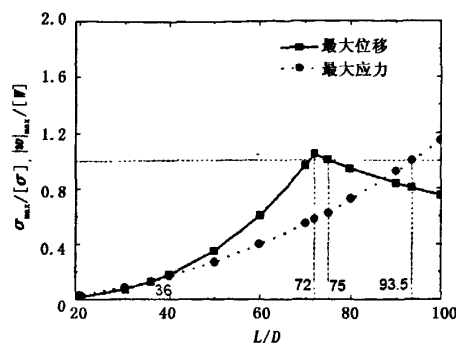


图 11 固支条件下海管危险状态的判定

Fig. 11 Assessment of failure style for fixed pipeline

(1) 简支约束。图 12 中给出了间隙比分别为 0.3, 0.5 和 0.7 的 3 种情况。从图 12 中可以看出, 随着来流速度增加, 安全跨长略有增加。随着间隙比增加, 刚度失效区逐渐减小, 强度失效区逐渐增大。由此可见, 间隙越大, 许用海管安全跨长越短。为了与工程上常用的动态安全跨长比较, 在图 12 中还给出了动态安全跨长随来流速度变化曲线。可以看出, 无论何种间隙比下, 动态安全跨长的范围都大于静载条件的, 而且随着来流速度增加, 二者趋于一致。需要说明的是, 这里的动态安全跨长是针对涡激振动而言的。

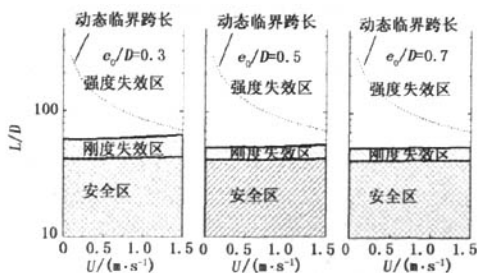


图 12 简支悬跨海管的安全跨长分区图

Fig. 12 Safety length zones for pinned-pinned

free spanning pipelines

(2) 固支约束。同样可以得到固支约束下海管安全跨长分区图(图 13)。由图 13 可以看出, 由于跨肩约束力的增强, 固支海管的安全跨长区要比简支的大, 而且当间隙比较小时, 刚度失效区嵌在安全区内。值得注意的是, 强度失效的临界跨长随间隙比的变化并不明显, 说明跨肩约束强的海管更能抵御环境因素的变化。图 13 中还分别给出了由 CAM 方法计算的结果和动态安全跨长。很明显, 本文中得到的强度失效临界跨长小于 CAM 方法的结果。这是由于本文考虑了底床的影响。另外还可以看出, 如果以强度失效来判断海管安全与否, 那么当来

流速度较大时, 静载下的安全跨长范围与动态情况重叠。

综合以上分析, 认为从工程设计上来说, 在来流速度比较小的时候应首先考虑静载条件下的临界安全跨长。

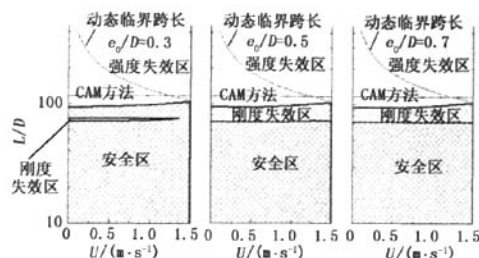


图 13 固支悬跨海管的安全跨长分区图

Fig. 13 Safety length zones for fixed-fixed free spanning pipelines

3 结 论

(1) 由修正势流法得到了更接近实验结果的升力系数, 纠正了传统势流理论对海管载荷的高估。

(2) 海管两端约束形式对位移的影响很大, 简支条件下的位移是固支的 5 倍。弹性约束的海管位移和应力都在简支和固支的之间。

(3) 悬跨长度增加时, 海管首先发生刚度失效, 然后才会发生强度失效。跨肩约束越强, 海管安全跨长范围越大。

(4) 来流速度较小时 ($U < 1.5$ m/s), 必须考虑海管的静态安全跨长。

参考文献:

- [1] FUMES G K, BERNTSEN J. On the response of a free span pipeline subjected to ocean currents [J]. Ocean Engineering, 2003, 30(12): 1553-1577.
- [2] LOU M, DING J, GUO H Y. The effect of internal flow on vortex-induced vibration of submarine free spanning pipelines [J]. China Ocean Engineering, 2005, 19(1): 147-154.
- [3] WANG X Q, SO R M C, LIU Y. Flow-induced vibration of an Euler-Bernoulli beam. [J] Journal of Sound and Vibration, 2001, 243(2): 241-268.
- [4] LEI C, CHENG L, KAVANAGH K. Re-examination of the effect of a plane boundary on force and vortex shedding of a circular cylinder [J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1999, 80(3): 263-286.

(下转第 129 页)

- mental investigations of cavitation effects on flow characteristics of small orifices and valves in water hydraulics [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2002, 15(4):380-384.
- [7] 高红,傅新,杨华勇,等. 锥阀阀口气穴流场的数值模拟和实验研究[J]. 机械工程学报, 2002, 38(8):27-30.
- GAO Hong, FU Xin, YANG Hua-yong, et al. Numerical and experimental investigation of cavitating flow within hydraulic poppet valve [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2002, 38(8):27-30.
- [8] 朱碧海,刘银水,李壮云,等. 水压节流阀口流量特性的实验研究及水压节流阀的研制[J]. 机床与液压, 2004, 5:63-65.
- ZHU Bi-hai, LIU Yin-shui, LI Zhuang-yun, et al. Experimental investigation of the flow characteristics of throttle valves in water hydraulics and development of a new-type water hydraulic throttle valve [J]. Machine Tool & Hydraulics, 2004, 5:63-65.
- [9] 贺小峰,黄国勤,杨友胜,等. 球阀阀口流量特性的试验研究[J]. 机械工程学报, 2004, 40(8):30-33.
- HE Xiao-feng, HUANG Guo-qin, YANG You-sheng, et al. Experimental research on the flow characteristics of ball valve orifice [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004, 40(8):30-33.
- [10] VAUGHAN N D, JOHNSTON D N, EDGE K A. Numerical simulation of fluid flow in poppet valves [J]. Proc Instn Mech Engrs, Part C, 1992, 206:119-127.
- [11] HISANORI UENO, ATSRSHI OKAJIMA, HIROYOSHI TANAKA. Noise measurement and numerical simulation of oil flow in pressure control valves [J]. JSME International Journal, Series B, 1994, 37(2):336-341.
- [12] KAZUMI ITO, KOJI TAKAHASHI, KIYOSHI INOUE. Flow in a poppet valve [J]. JSME International Journal, Series B, 1993, 36(1):42-50.
- [13] GAO Hong, FU Xin, YANG Hua-yong. Numerical investigation of cavitating flow behind the cone of a poppet valve in water hydraulic system [J]. Journal of Zhejiang University SCIENCE, 2002, 3(4):395-400.

(编辑 沈玉英)

(上接第124页)

- [5] FREDSON J, HANSEN E A. Lift forces on pipelines in steady flow [J]. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 1987, 113(2):139-155.
- [6] LAM K Y, WANG Q X, ZONG Z. A nonlinear fluid-structure interaction analysis of a near-bed submarine pipeline in a current [J]. Journal of Fluids and Structures, 2002, 16(8):177-1191.
- [7] BURESTI G, LANCIOTTI A. Mean and fluctuating forces on a circular cylinder in cross-flow near a plane surface [J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1992, 41-44(1-3):639-650.
- [8] BEARMAN P W, ZDRAVKOVICH M M. Flow around a circular cylinder near a plane boundary [J]. Journal of Fluids and Structures, 1978, 89(1):33-47.
- [9] HANSEN E A, FREDSON J, MAO Y. Two-dimensional scour below pipelines: proceedings of the 5th International Symposium Offshore Mechanics and Arctic Engineering, 1986 [C]. Japan: Tokyo, c1986.
- [10] 李亚智,赵美英,万小鹏. 有限元法基础与程序设计 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [11] 刘鸿文. 材料力学 [M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2003.

(编辑 沈玉英)