

文章编号:1673-5005(2009)06-0173-04

解非线性方程的多点曲线法

于桂杰¹, 李维国²

(1. 中国石油大学 储运与建筑工程学院, 山东 青岛 266555; 2. 中国石油大学 数学与计算科学学院, 山东 东营 257061)

摘要:通过分析常用的求解非线性问题的数值方法, 提出一类具强烈几何背景的多点曲线法。多点曲线法不仅具有超二次收敛的特性, 而且避免了高阶导数, 其收敛域比高阶非 Newton 法的收敛域有明显改善。数值算例结果表明多点曲线法在奇异非线性方程和非线性方程组求解等问题中非常实用。

关键词:非线性方程; 高阶收敛性; 非线性方程组; 奇异性

中图分类号:O 151 **文献标识码:**A

Multi-point curve method of solving nonlinear equation

YU Gui-jie¹, LI Wei-guo²

(1. College of Transport & Storage and Civil Engineering in China University of Petroleum, Qingdao 266555, China;

2. College of Mathematics and Computational Sciences in China University of Petroleum, Dongying 257061, China)

Abstract: By analyzing the traditional numerical methods of solving nonlinear equations, a kind of multi-point curve methods which have strong geometric background were presented. This kind of methods not only have super-quadratic convergence, but also can iterate without higher derivatives. Furthermore, the convergent fields of these new methods are obviously improved compared with higher order non-Newton method. The numerical results show that the presented method is effective in solving singular nonlinear equation and nonlinear systems of equations.

Key words: nonlinear equation; higher order convergence; nonlinear systems of equations; singularity

1 问题的提出

非线性方程和方程组的数值解法一直是多年来人们研究的热点。Newton 法(或 Newton-Raphson 法)是求解非线性方程和非线性方程组的最常用方法, 在一定条件下具有二阶收敛速度。人们可以从不同的角度导出这种方法, 而直接从其几何意义出发是最直观和最简洁的导出方法。利用这种几何意义还可以进一步推导出一系列好方法。

1.1 Newton 法

Newton 法的几何意义是用切线代替曲线, 切线与 x 轴的交点代替曲线与 x 轴交点的一种逐次逼近法。曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_n, f(x_n))$ 点的切线方程为

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n),$$

从而它与 x 轴的交点:

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1}f(x_n),$$

用此公式迭代求解就是 Newton 法。

1.2 割线法

利用 Newton 法的思想, 经过两点 $(x_n, f(x_n))$ 和 $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ 得一割线方程, 从而它与 x 轴的交点为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}f(x_n).$$

其单个方程收敛速度为 1.618, 优点是不用求导数且超线性收敛。

1.3 抛物线法

若采用过三点 $(x_n, f(x_n))$, $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ 和 $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$ 的抛物线, 则抛物线与 x 轴的交点为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4f(x_n)f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]}} ,$$

收稿日期:2009-01-09

基金项目:国家自然科学基金项目(60971132)

作者简介:于桂杰(1962-), 男(汉族), 山东招远人, 副教授, 博士, 主要从事工程力学方面的教学与科研工作。

其中

$$\omega = f[x_n, x_{n-1}] + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x_k - x_{k-1}).$$

这就是抛物线法(Muller法),单个方程收敛速度为1.840,其优点是不用求导数且超线性收敛^[1]。

1.4 其他方法

若采用过单点的抛物线、圆、椭圆和双曲线分别去逼近可以分别得出 Euler 法、Chebyshev 方法、Halley 方法、super-Halley 方法等,它们均具有三阶的收敛速度^[2]。

最近有人用二次曲线 $x^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ 单点逼近给出了一类(单参数)三次收敛的方法,把抛物线、圆、椭圆和双曲线(甚至 Newton 法)都作为它的特例^[3]。

2 多点曲线法

2.1 二次曲线法

若采用过两点 $(x_n, f(x_n))$ 和 $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ 的二次曲线法,即令

$$y = a(x - x_n)^2 + b(x - x_n) + c,$$

并设其过两点 $(x_n, f(x_n))$ 和 $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ 且满足在点 $(x_n, f(x_n))$ 的切线条件,则可以得到只含一阶导数的两点迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n) \mp \sqrt{f'^2(x_n) - 4af(x_n)}}{2a}, \quad (1)$$

其中

$$a = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{(x_n - x_{n-1})^2} - \frac{f'(x_n)}{x_n - x_{n-1}}.$$

式(1)具有超二阶收敛速度,可以求复根,有时可以同时求得两个根。

同样,若采用过两点 $(x_n, f(x_n))$ 和 $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ 且满足在点 $(x_n, f(x_n))$ 的切线条件,并结合反函数法则,即令

$$x = a(y - f(x_n))^2 + b(y - f(x_n)) + c,$$

则可以得到一个只含一阶导数的两点迭代公式

$$x_{n+1} = af^2(x_n) + x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (2)$$

其中

$$a = \frac{1}{f'(x_n)(f(x_n) - f(x_{n-1}))} - \frac{x_n - x_{n-1}}{(f(x_n) - f(x_{n-1}))^2}.$$

式(2)具有超二阶收敛速度,且收敛域与 Newton 法相当。若 $a=0$,则式(2)就是 Newton 法公式。

2.2 三次曲线法

若采用过两点 $(x_n, f(x_n))$ 和 $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ 并满足此两点切线条件的三次曲线法,可以得到只含

一阶导数的两点迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - bf^2(x_n) - af^3(x_n), \quad (3)$$

其中

$$b = \frac{3(x_n - x_{n-1})}{(f(x_n) - f(x_{n-1}))^2} - \frac{2}{f'(x_n)(f(x_n) - f(x_{n-1}))} - \frac{1}{f'(x_{n-1})(f(x_n) - f(x_{n-1}))},$$

$$a = -\frac{2(x_n - x_{n-1})}{(f(x_n) - f(x_{n-1}))^3} + \frac{1}{f'(x_n)(f(x_n) - f(x_{n-1}))^2} + \frac{1}{f'(x_{n-1})(f(x_n) - f(x_{n-1}))^2}.$$

它可类类似于 Householder 方法(三阶方法)的离散情形^[4]。Householder 方法(有多种导出方式)为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2[f'(x_n)]^3}f^2(x_n).$$

若将 $f''(x_n) \approx \frac{f'(x_n) - f'(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ 代入上式得

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f'(x_n) - f'(x_{n-1})}{2[f'(x_n)]^3(x_n - x_{n-1})}f^2(x_n).$$

此方法只含一阶导数,且利用两点 $(x_n, f(x_n))$ 、 $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ 的导数信息和 $(x_n, f(x_n))$ 点函数值,收敛速度为超二阶。它与式(3)相比,速度要快一点,但收敛域要小得多。

若采用过三点 $(x_n, f(x_n))$ 、 $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ 和 $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$ 且满足 $(x_n, f(x_n))$ 点的切线条件的三次曲线法,可以得到只含一阶导数的三点迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - bf^2(x_n) - af^3(x_n), \quad (4)$$

其中

$$a = \frac{1}{f'(x_n)(f(x_{n-2}) - f(x_n))(f(x_{n-1}) - f(x_n))} + \frac{(x_n - x_{n-2})(f(x_{n-1}) - f(x_n))^2 - (x_n - x_{n-1})(f(x_{n-2}) - f(x_n))^2}{(f(x_n) - f(x_{n-1}))^2(f(x_n) - f(x_{n-2}))^2(f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}))},$$

$$b = \frac{x_n - x_{n-1}}{(f(x_{n-1}) - f(x_n))^2} - \frac{1}{f'(x_n)(f(x_{n-1}) - f(x_n))} - a(f(x_{n-1}) - f(x_n)).$$

式(4)的收敛域与 Householder 方法接近。

若考虑过两点 $(x_n, f(x_n))$ 和 $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ 且满足在点 $(x_n, f(x_n))$ 的切线条件的特殊曲线

$$y - f(x_n) = a(x - x_n)(y - f(x_n)) + b(x - x_n),$$

则可以得到只含一阶导数的两点迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n) - af(x_n)]^{-1}f(x_n), \quad (5)$$

其中

$$a = \frac{1}{x_{n-1} - x_n} - \frac{f'(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}.$$

3 应用

公式(1)~(5)的优点是仅用一阶导数,但收敛速度比 Newton 法快,且收敛域并无明显减小。其他高阶方法(如 Householder 方法等)或者含高阶导数或者收敛域变小,甚至二者都有,因此提出的多点曲线方法有一定的优越性。

(1)在方程的求根过程中,经常遇到导数为零或 Jacobi 奇异的情形,这时 Newton 迭代失败,但可以利用一些特殊的格式进行迭代却仍然保持至少二次或超二次收敛的速度。

(2)有些单个非线性方程的求解方法可以推广到更加实用的非线性方程组和非线性抽象方程的求解。如对式(5),可以称之为推广的 Halley 方法^[56],其迭代格式为

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - [F'(x_n) - AF(x_n)]^{-1}F(x_n), \\ A(x_{n-1} - x_n)(F(x_{n-1}) - F(x_n)) = F(x_{n-1}) - \\ F(x_n) - F'(x_n)(x_{n-1} - x_n). \end{cases}$$

其中 $AF(x_n)$ 可以通过求解两个工作量不大的广义的 Householder 矩阵^[8]获得,即由

$$\bar{H}(x_{n-1} - x_n) = F(x_{n-1}) - F(x_n) - F'(x_n)(x_{n-1} - x_n),$$

求出 $\bar{H}$,再由 $\hat{H}(F(x_{n-1}) - F(x_n)) = \bar{H}F(x_n)$ 求出 $\hat{H}$,则 $\hat{H}$ 就是 $AF(x_n)$ 。

注 若 $\|x\| = \|y\|$,则存在 Householder 矩阵 H ,

使得 $Hx = y$,若 $\|x\| \neq \|y\|$ 且 $x \neq 0$,则存在广义的 Householder 矩阵定义为

$$\bar{H} = \alpha H \equiv \|y\|/\|x\|H, \text{使得 } \bar{H}x = y.$$

4 数值算例

数值计算全部用程序 Matlab7.1 完成。

例1 求下列非线性方程的根:

$$f(x) \equiv x^3 - 2. \tag{6}$$

令 $x_0 = 1(x_{-1} = 2)$ 。

例2 鲍威尔奇异函数(取 $x^{(0)} = (3, -1, 0, 1)$):

$$F(x) = (f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)), x^* = (0, 0, 0, 0),$$

$$\begin{cases} f_1(x) = x_1 + 10x_2, \\ f_2(x) = \sqrt{5}(x_3 - x_4), \\ f_3(x) = (x_2 - 2x_3)^2, \\ f_4(x) = \sqrt{10}(x_1 - x_4)^2. \end{cases} \tag{7}$$

例3^[89] 三角函数(取 $x^{(0)} = \frac{1}{1.6}(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$), $n = 500$ 。 $x^* = (0, \dots, 0)$,

$$f_i(x) = n - \sum_{j=1}^n \cos x_j + i(1 - \cos x_j) - \sin x_j, \quad i = 1, \dots, n. \tag{8}$$

以 $x^{(0)}$ 和 $x^{(1)}$ ($x^{(0)}$ 的 Newton 迭代点)为初始点的式(5)和 Newton 法迭代比较见表1。

表1 数值结果比较

Table1 Contrast between numerical results

算例	k	本文算法(式(5))		Newton 法	
		$\ x^{(k)} - x^*\ $	$\ f(x^{(k)})\ $	$\ x^{(k)} - x^*\ $	$\ f(x^{(k)})\ $
例1	0	-1	3	-1	3
	1	1.333 333 333 333 333	0.370	0	2
	2	1.257 839 721 254 356	9.90×10^{-3}	发散	发散
	3	1.259 921 179 854 534	6.19×10^{-7}		
	4	1.259 921 049 894 873	0		
例2	1	1.226 6	3.172 1	1.226 6	3.172 1
	18	$5.414 8 \times 10^{-7}$	$4.632 6 \times 10^{-13}$	$1.871 3 \times 10^{-5}$	$7.385 7 \times 10^{-10}$
	22			$5.847 8 \times 10^{-7}$	$7.212 6 \times 10^{-13}$
例3	1	1.246 986 358 153 823	32.436 310 899 612 65	1.246 986 358 153 823	32.436 310 899 612 65
	9	$2.836 335 404 257 779 \times 10^{-28}$	$2.836 335 404 257 779 \times 10^{-28}$	$3.655 635 238 203 047 \times 10^{-6}$	$3.656 024 594 272 529 \times 10^{-6}$
	11			$1.873 038 054 989 227 \times 10^{-7}$	$1.873 038 054 989 227 \times 10^{-7}$

5 结束语

提出了求解非线性方程的多点曲线法,该方法还可以在非线性方程组的求解过程中有所发展,特

别是在扩大收敛域和奇异问题方面。该方法一方面避免了高阶导数,另一方面又能保持较高的收敛速度。

参考文献:

- [1] 李庆扬,王能超,易大义. 数值分析[M]. 北京:清华大学出版社,2001:235-244.
- [2] AMAT S, BUSQUIER S, GUTIERREZ J M. Geometric constructions of iterative functions to solve nonlinear equations[J]. J Comput Appl Math, 2003, 157(1):197-205.
- [3] SHARMA J R. A family of third-order methods to solve nonlinear equations by quadratic curves approximation[J]. Appl Math Comput, 2007, 184(2):210-215.
- [4] NOOR K I, NOR M A, MOMANI S. Modified Householder iterative method for nonlinear equations[J]. Appl Math Comput, 2007, 190(2):1534-1539.
- [5] EZQUERRO J A, HEMANDEZ M A. On Halley-type iterative with free second derivative[J]. J Comput Appl Math, 2004, 170(2):455-459.
- [6] HALLEY E. A New, exact and easy method of finding the roots of equations generally, and that without any previous reduction [J]. Phil Roy Soc London, 1964, 18(1):136-145.
- [7] GOLUB G H, Van LOAN C F. Matrix computations [M]. 3rd Ed. Baltimore and London: The Johns Hopkins University Press, 1996:208-222.
- [8] KELLEY C T. Iterative methods for linear and nonlinear equations [M]. Philadelphia: SIAM, 1995:71-109.
- [9] ORTEGA J M, RHEINBOLDT W C. Iterative solutions of nonlinear equations in several variables [M]. New York: Academic Press, 1970:308-404.

(编辑 修荣荣)

下期要目

- 郭卫星,等 生长地层与褶皱运动学关系
- 季宗镇,等 构造裂缝多参数定量计算模型修改
- 侯旭波,等 济阳坳陷中生代负反转构造发育特征分析
- 汪志明,等 裂缝参数对压裂水平井入流动态影响规律
- 翟应虎,等 基于模糊概率理论的地层流体精确识别方法
- 任韶然,等 CO₂ 地质埋存:国外示范工程及对中国的启示
- 李增亮,等 多相泵导轮的准三维正反问题设计
- 王芝银,等 确定管道穿越土质边坡斜竖井设计参数的新方法
- 王早祥,等 油田注水地面技术枝状管网水力计算
- 付 英,等 聚硅酸铁对溶解性有机物与浊度的去除
- 刘章勇,等 改性高岭土吸附卟啉钒的热力学行为
- 于双林,等 常压渣油加氢反应产物体系的胶体稳定性变化
- 戴彩丽,等 延缓交联体系深部调剂性能的影响因素
- 陈钢花,等 测井资料在地层油藏不整合纵向结构研究中的应用
- 杨培杰,等 子空间法 SIMO 系统混合相位地震子波提取
- 郑 占,等 利用 4D 地震数据校正储层静态模型的集合卡尔曼滤波方法
- 田学民,等 基于特征向量子空间距离的 MPC 控制器性能诊断