

文章编号:1673-5005(2009)05-0100-04

# 力电耦合场中带电小球的最速降线解

刘建林, 聂志欣, 李广帅

(中国石油大学 储运与建筑工程学院, 山东 青岛 266555)

**摘要:**通过变分原理的方法研究力电耦合场中带电小球的最速降线问题, 导出其轨迹控制方程, 即 Euler - Lagrange 方程。对此强非线性两点边值问题, 通过打靶法编制相应程序进行求解, 得到带电小球在电场强度和电场方向变化时的最速降落轨迹。同时讨论最速降线为直线时电场强度与电场方向应满足的条件, 并求得此时降落所需要的总时间。结果表明, 最速降线是可以通外场进行定量调控的。

**关键词:**力电耦合场; 最速降线; 两点边值; 电场; 下降时间

**中图分类号:** O 311      **文献标识码:** A

## Brachistochrone solution of electric ball in electromechanical coupling field

LIU Jian-lin, NIE Zhi-xin, LI Guang-shuai

(College of Transport & Storage and Civil Engineering in China University of Petroleum, Qingdao 266555, China)

**Abstract:** The brachistochrone of an electric ball in the electromechanical coupling field was investigated according to variational method, and the corresponding governing equation (Euler-Lagrange equation) was derived. For the two-point value problem with strong nonlinearity, the shooting method was adopted, and the fastest dropping lines of the electric ball were obtained when the direction and intensity of the electric field were changed. At the same time, when the brachistochrone is a linear line, the relation between the direction and intensity of the electric field was discussed in detail. Furthermore, the total consuming time of the fast dropping in this case was calculated. The results indicate that the brachistochrone of an electric ball can be modulated quantitatively by the external field.

**Key words:** electromechanical coupling field; brachistochrone; two-point value problem; electric field; dropping time

最速降线问题是分析学的一个基本问题, 由意大利科学家 Galileo<sup>[1]</sup> 提出。Isaac Newton, Jakob Bernoulli, Gottfried Leibniz, Ehrenfried Walther von Tschirnhaus 与 Guillaume de l'Hôpital 先后参与了此问题的求解<sup>[2-5]</sup>。最速降线问题的正确答案是连接两个点上凹的唯一一段旋轮线。最速降线问题除了具有理论上的重大意义, 在建筑、微分几何、机械等领域也有广泛的应用。谢小良研究了最速降线法在随机故障控制模型中的应用<sup>[6]</sup>。李怀坝、王鲁民等讨论了最速降线与反宇屋面的关系<sup>[7-8]</sup>。尤明庆、Wensrich<sup>[9-10]</sup> 研究了考虑摩擦效应的最速降线解并且给出了等时线的方程, 但是他们的计算并没有考

虑摩擦力沿着水平方向做功的影响。Staford<sup>[11]</sup> 研究了最速降线的经典几何求解。但是, 迄今为止有关在力电耦合场中带电小球的最速降线问题尚未见报道。笔者通过变分原理的方法推导其控制方程, 研究其轨迹特征。

## 1 力电耦合场中带电小球的最速降线方程

建立如图 1 所示的直角坐标系 ( $oxy$ ), 带电量为  $+Q$  的小球质量为  $m$ , 受到与  $x$  轴夹角为  $\alpha$  的电场  $E$  的作用。小球从原点释放, 沿不同的路径最终到达点  $(a, b)$ 。小球下降到任一位置  $(x, y)$  时, 由动能定

收稿日期: 2009-02-23

基金项目: 国家自然科学基金项目 (10802099); 教育部博士点基金项目 (200804251520); 中国石油大学博士科研启动基金项目 (Y081513)

作者简介: 刘建林 (1977-), 男 (汉族), 山东胶南人, 讲师, 博士, 研究方向为固体仿生力学、软物质与应用数学。

理,有

$$\begin{cases} EQ\cos\alpha x = \frac{1}{2}mv_x^2, \\ (mg + EQ\sin\alpha)y = \frac{1}{2}mv_y^2. \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $g$  为重力加速度;  $v_x, v_y$  分别为沿  $x$  轴和  $y$  轴方向的速度分量。

小球此时的速度可以表示为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2g} \sqrt{\mu\cos\alpha x + (1 + \mu\sin\alpha)y}. \quad (2)$$

其中

$$\mu = EQ/(mg).$$

式中,  $\mu$  为电场与重力场的比值,称为电场强度。

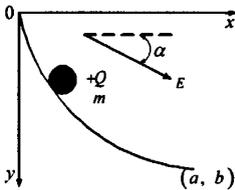


图1 力电耦合场中带电小球的最速降线示意图  
Fig.1 Schematic diagram of brachistochrone of electric ball in electromechanical coupling field

小球在任一时刻的速度表达式为

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{dt}. \quad (3)$$

将式(2)代入式(3)并进行积分,得到下降的总时间为

$$T = \int_0^a dt = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{\sqrt{\mu\cos\alpha x + (1 + \mu\sin\alpha)y}}. \quad (4)$$

令  $F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{\mu\cos\alpha x + (1 + \mu\sin\alpha)y}}$ , 则有

$$F_y = \frac{(1 + \mu\sin\alpha) \sqrt{1 + y'^2}}{2[\mu\cos\alpha x + (1 + \mu\sin\alpha)y]^{3/2}}, \quad (5)$$

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{\mu\cos\alpha x + (1 + \mu\sin\alpha)y} \sqrt{1 + y'^2}},$$

$$\frac{dF_{y'}}{dx} = \{2y''[\mu\cos\alpha x + (1 + \mu\sin\alpha)y] - (y' + y'^3)[\mu\cos\alpha + (1 + \mu\sin\alpha)y']\} / \{2[\mu\cos\alpha x + (1 + \mu\sin\alpha)y]^{3/2} (1 + y'^2)^{3/2}\} + \frac{(1 + \mu\sin\alpha)(1 + y'^2)^2}{2[\mu\cos\alpha x + (1 + \mu\sin\alpha)y]^{3/2} (1 + y'^2)^{3/2}}$$

其中,  $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}$ 。

对式(4)取变分,根据最小势能原理,得到 Euler-Lagrange 方程

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0. \quad (8)$$

将式(5)~(7)代入式(8),可以得到最速降线的泛定方程

$$2y''[\mu\cos\alpha x + (1 + \mu\sin\alpha)y] - \mu\cos\alpha y'^3 + (1 + \mu\sin\alpha)y'^2 - \mu\cos\alpha y' + 1 + \mu\sin\alpha = 0. \quad (9)$$

边界条件为

$$y(0) = 0, y(a) = b. \quad (10)$$

式(9)与式(10)组成了一个两点边值问题,无法直接求得解析解,故在此采用打靶法,自行编制了 Matlab 程序进行求解。当电场强度和方向变化时,小球的最速降线轨迹发生变化,如图2所示。当  $\alpha = 30^\circ$ , 而电场强度逐渐变大时,小球的最速降线由原来单纯在重力场中的轨迹逐渐变为下凹的幅度减小,并且达到某一特定强度时,曲线可能变为直线,进而变为上凸的形状。当电场强度一定,  $\mu = 0.5$ , 而电场强度的方向发生变化时,小球的最速降线轨迹也将发生相应的变化,如图3所示。

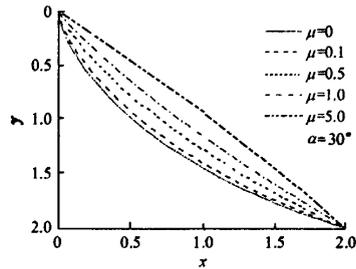


图2 电场方向一定,电场强度改变时小球的最速降线  
Fig.2 Brachistochrone of a ball as electric field intensity changing but direction of electric field given

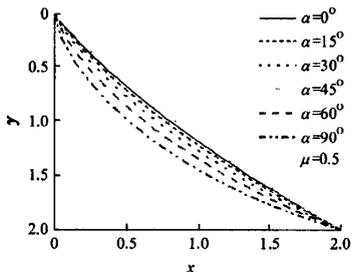


图3 电场强度一定,电场方向改变时小球的最速降线  
Fig.3 Brachistochrone of a ball as direction of electric field changing but electric intensity given

由图3可见,  $\alpha$  比较小时与  $\alpha$  比较大时最速降线的形状随电场方向的变化规律不一样,这是方程

(9) 的强非线性特征所导致的。由此可见,可以通过改变外场的强度和方向以控制带电小球的最速降落轨迹,从而实现对小球的精确打击。

### 2 特殊情形时小球的最速降线方程

当小球只受重力影响时,电场强度  $\mu = 0$ , 式(9)退化为

$$2yy'' + y'^2 + 1 = 0. \tag{11}$$

此方程的解为重力场中最速降线的经典解。方程(11)可以进一步化简为

$$dx = \sqrt{\frac{y}{K-y}} dy. \tag{12}$$

其中,  $K$  为常数,由两个边界条件确定。

令  $y = K(1 - \cos t)/2$ , 则  $dy = K \sin t dt/2$ , 方程(11)的解为旋轮线的一部分,即

$$\begin{cases} x = \frac{K}{2}(t - \sin t), \\ y = \frac{K}{2}(1 - \cos t). \end{cases} \tag{13}$$

其中,  $t$  为参数。

最速降线的经典解说明重力加速度并不影响最速降线的轨迹。当  $\alpha = 90^\circ$  或者  $270^\circ$  时,式(9)也退化为式(11)所示的经典解。这说明,当电场方向与重力方向重合或者相反时,仅改变带电小球的加速度,但并不影响其最速降线的轨迹。

### 3 最速降线为直线时的方程

当电场强度和电场方向满足一定的组合时,可以使小球的最速降线成为一条直线。因为小球经过两点  $(0, 0)$ ,  $(a, b)$ , 故其解析式可以写为

$$y = bx/a. \tag{14}$$

将式(14)代入式(9),可以得到

$$\mu = \frac{1}{(b/a)\cos\alpha - \sin\alpha}. \tag{15}$$

式(15)说明,当电场强度与电场方向满足式(15)所示的组合时,带电小球的最速降线为一条过起点与终点的直线。当小球的终点一定,电场强度与电场方向的关系如图4所示。当电场方向一定,电场强度与  $b/a$  的关系如图5所示。

当小球的最速降线为直线时,将式(14), (15)代入式(4),可以得到其降落所需的时间

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{\sqrt{\mu \cos \alpha x + (1 + \mu \sin \alpha) y}} = \sqrt{\frac{2}{g}} \times \frac{a^2 + b^2}{a^{3/2}} \sqrt{\frac{a \cos \alpha}{b \cos \alpha - a \sin \alpha}}$$

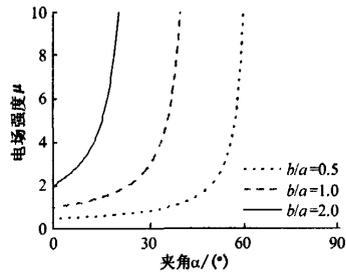


图4 最速降线为端点固定的直线时 电场强度与电场方向的关系

Fig.4 Dependence relationship of electric field intensity and direction when brachistochrone being a line of two ends fixed

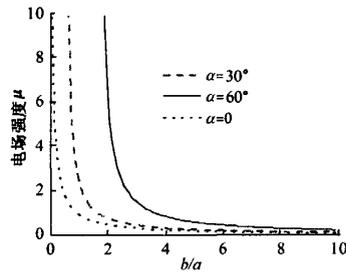


图5 电场方向一定,最速降线为直线时 电场强度与终点的关系

Fig.5 Dependence relationship of electric field intensity and final point when brachistochrone being a line and field direction given

当终点坐标一定时,此时的降落时间与电场方向的关系如图6所示。点的位置不同,所用时间也不同;当电场方向改变时,下降的时间也随之变化。

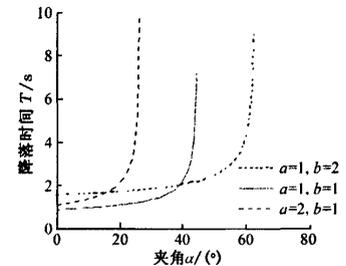


图6 最速降线为直线时下降时间与 电场方向的函数关系

Fig.6 Dependence relationship of dropping time and direction of electric field intensity when brachistochrone being a line

### 4 结束语

通过变分原理的方法可以得到力电耦合场中带电小球的最速降线控制方程。通过打靶法求解了此

两点边值问题,得到了带电小球在电场强度和电场方向变化时的最速降落轨迹。改变外场方向和强度可以明显改变小球的最速降落轨迹。讨论了最速降线为直线时电场强度与电场方向应满足的条件,求得了此时降落所需要的总时间。选择合适的电场强度和电场方向可以控制最速降线的形状,这对于精确打击、精确控制等有一定的参考价值。

#### 参考文献:

- [1] HERRERA M D I. Galileo, Bernoulli, Leibniz and Newton around the brachistochrone problem [J]. *Rev Mexicana Fis*, 1994,40(3):459-475.
- [2] DIETZ P. Die Ursprünge der variationsrechnung bei Jakob Bernoulli [J]. *Verh Naturf Ges Basel*, 1959,70:81-146.
- [3] ERLICHSON H. Johann Bernoulli's brachistochrone solution using Fermat's principle of least time [J]. *European J Phys*, 1999,20(5):299-304.
- [4] PEDERSEN K, PEDERSEN K M. The early history of the calculus of variations (Danish) [J]. *Nordisk Ma Tidsskr*, 1971,19:61-74.
- [5] THIELE R. Das Zerwürfnis Johann Bernoullis mit seinem Bruder Jakob, natur, mathematik und geschichte [J]. *Acta Hist Leopold*, 1997,27:257-276.
- [6] 谢小良. 最速降线方法在随机故障控制模型中的应用 [J]. *知识丛林*, 2007(9):143-144.
- XIE Xiao-liang. Application of the brachistochrone method in the random fault controlling model [J]. *Knowledge Forest*, 2007(9):143-144.
- [7] 李怀坝. 最速降线及反宇屋面 [J]. *新建筑*, 1993(3):51-59.
- LI Huai-xun. The brachistochrone and the inverse cosmic building surface [J]. *New Building*, 1993(3):51-59.
- [8] 王鲁民, 马彬. 答《最速降线及反宇屋面》 [J]. *新建筑*, 1995(1):49-50.
- WANG Lu-min, MA Bin. Reply to "the brachistochrone and the inverse cosmic building surface" [J]. *New Building*, 1995(1):49-50.
- [9] 尤明庆. 最速降线求解和摩擦力影响的研究 [J]. *河南理工大学学报*, 2005,24(1):83-88.
- YOU Ming-qing. Investigation on the solution of the brachistochrone and the effect of the friction force [J]. *Journal of the University of Henan Technology*, 2005,24(1):83-88.
- [10] WENSRICH C M. Evolutionary solutions to the brachistochrone problem with coulomb friction [J]. *Mech Res Commun*, 2004,31:151-159.
- [11] STALFORD H L, GARRETT Jr F E. Classical differential geometry solution of the brachistochrone tunnel problem [J]. *J Optimiz Theory App*, 1994,80(2):227-260.
- (编辑 沈玉英)
- 
- (上接第94页)
- [6] GUARINI S E, MOSER R D, SHARIFF K, et al. Direct numerical simulation of a supersonic turbulent boundary layer at Mach 2.5 [J]. *Journal of Fluid Dynamics*, 2000, 414:1-33.
- [7] WANG Meng, LELE Sanjiva K, MOIN Parviz. Sound radiation during local laminar breakdown in a low-Mach number boundary layer [J]. *Journal of Fluid Dynamics*, 1996,319:197-218.
- [8] RAI M M, MOIN P. Direct numerical simulation of transition and turbulence in a spatially evolving boundary layer [J]. *Journal of Fluid Dynamics*, 1993,109:169-192.
- [9] RAI M M, GATSKI T B, ERLEBACHER G. Direct simulation of spatially evolving compressible turbulent boundary layers: AIAA, Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 33rd, Reno, NV, Jan 9-12, 1995 [C]. United States, 1995.
- [10] 傅德薰, 马延文. 计算流体力学 [M]. 北京:高等教育出版社, 2002.
- [11] 李新亮, 傅德薰, 马延文. 可压缩钝楔边界层转捩到湍流的直接数值模拟 [J]. *中国科学:G 辑*, 2004, 34(4):466-480.
- LI Xin-liang, FU De-xun, MA Yan-wen. Direct numerical simulation of compressible boundary layer transition to turbulence on a blunt cone [J]. *Science in China (Ser G)*, 2004, 34(4):466-480.
- (编辑 李志芬)