

文章编号:1673-5005(2009)05-0089-06

可压缩效应对平板湍流边界层影响的直接数值模拟

高 慧

(中国石油大学 石油工程学院, 山东 青岛 266555)

摘要:采用高精度紧致型差分格式求解三维可压缩 Navier-Stokes 方程,通过在局部平板上引入周期性吹吸气小扰动的方法,直接数值模拟来流马赫数 M_∞ 为 2.25 的空间发展的可压缩平板湍流边界层。所得流场统计特征与相关理论和试验符合较好。在此基础上研究可压缩效应对平均流动特征以及湍能的生成和耗散特征的影响,指出在 $M_\infty = 2.25$ 的情况下,Markovian 假设基本成立,但可压缩效应使得拟序结构有明显差别。与不可压相比上抛、下扫对不同区域的作用有所不同。在近壁区,压力-膨胀项和压力-速度相关项仍是不可忽略的量,这导致声的产生和可压缩效应对湍能产生抑制作用。平板上声压的分布表明,随流动向下游的发展,边界层转捩过程激发了由物面脉动压力所产生的偶极子声源。

关键词:可压缩效应;平板湍流边界层;直接数值模拟;湍能

中图分类号: O 35 **文献标识码:** A

Direct numerical simulation of compressible effects on flat-plate turbulent boundary layer

GAO Hui

(College of Petroleum Engineering in China University of Petroleum, Qingdao 266555, China)

Abstract: A direct numerical simulation of a spatially evolving compressible flat-plate turbulent boundary layer with incoming Mach number M_∞ for 2.25 was performed for solving three-dimensional compressible Navier-Stokes equations using high order compact finite difference schemes, through introducing a periodic blowing and suction disturbance on the upstream local wall. The turbulent statistics results agree well with the related theoretical and experimental data. The compressible effects on the characteristics of mean flow and production and dissipation of turbulent energy in flat-plate turbulent boundary layer flow were analyzed, and Markovian's hypothesis comes into existence basically under the condition of M_∞ for 2.25. However, the results show that the ordered structures are different obviously on the effect of the compressibility. The action on different region for up-throwing and down-sweeping in the compressible turbulent boundary layer flow is different from that in the incompressible channel turbulent flow. The terms of pressure-dilatation and pressure-velocity can not be neglected near the wall, which leads to the production of sound and the restrained action to turbulent energy produced by compressibility effects. Further, the situation of the sound pressure on the wall of the compressible flat-plate turbulence was presented, which shows that the source of noise produced by the pulsation pressure was inspired during the transitional progress with the evolving of the boundary layer flow.

Key words: compressible effect; flat-plate turbulent boundary layer; direct numerical simulation; turbulent energy

在航空航天、石油开采等工程领域,如高压射流钻井技术^[1]中,存在着大量的可压缩壁湍流问题。研究其压缩性效应有助于人们对湍流的控制。可压缩平板湍流方面的主要研究成果见文献[2]~[8],但关于可压缩效应方面的分析内容还比较少。笔者

采用高精度差分方法求解三维可压缩 Navier-Stokes 方程,在上游局部平板上引入周期性吹吸扰动^[9],直接数值模拟空间发展的可压缩平板湍流边界层,给出湍流统计平均结果,分析可压缩效应对湍能的影响,说明和预测可压缩平板湍流具有的一些特点。

收稿日期:2009-04-13

作者简介:高慧(1974-),女(汉族),河南濮阳人,讲师,博士,从事计算流体力学方面的研究。

1 控制方程和离散方法

1.1 基本方程

可压缩平板边界层流动问题是通过直接数值求解可压缩 Navier-Stokes 方程来研究的。对于不计外力的完全气体,在直角坐标系下,无量纲化后的三维可压缩 Navier-Stokes 方程见文献[10]。

1.2 边界条件

图1给出了平板湍流的计算域。 x, y 和 z 分别代表流向、平板法向和展向的坐标方向。

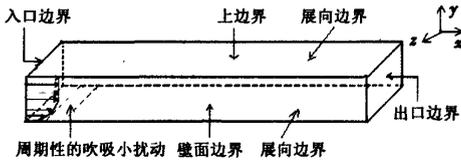


图1 平板湍流边界层的计算域

Fig.1 Computational area for flat-plate turbulent boundary layer

(1) 入口边界条件: 首先求解二维可压缩 Navier-Stokes 方程,得到可压缩平板层流边界层的定常解,再将 $x = 4.0$ 处剖面上的流场参数值作为模拟可压缩平板湍流边界层的入口边界条件。

(2) 壁面边界: 在壁面上采用速度无滑移条件和等温壁条件,即速度均为0,温度等于常数 T_w (T_w 为平板的壁面温度)。为了减小流向计算域,尽快激发湍流,在 $4.5 \leq x \leq 5.0$ 的壁面上施加周期性的吹吸小扰动,此区域内壁面法向速度 v 的边界条件为 $v = v_{bs}$,吹吸速度 v_{bs} 由若干正弦波组成,沿展向有10个模态,在时间方向有5个模态,其具体表达式^[9]为

$$v_{bs} = Af(x)g(z)h(t). \tag{1}$$

其中

$$f(x) = 4\sin \theta(1 - \cos \theta)/27^{1/2},$$

$$\theta = 2\pi(x - x_a)/(x_b - x_a);$$

$$g(z) = \sum_{l=0}^{l_{max}} Z_l \sin[2\pi l(z/z_{max} + \phi_l)],$$

$$\sum_{l=1}^{l_{max}} Z_l = 1, Z_l = 1.25Z_{l+1};$$

$$h(t) = \sum_{m=1}^{m_{max}} T_m \sin[2\pi m(\beta t + \phi_m)],$$

$$\sum_{m=1}^{m_{max}} T_m = 1, T_m = 1.25T_{m+1}.$$

式中, $l_{max} = 10, m_{max} = 5; x_a$ 和 x_b 分别为施加扰动区

域的初始和末端位置, $x_a = 4.5, x_b = 5.0; A = 0.04$ 为所加扰动的振幅; β 为扰动的基本时间频率。为了加快流动的转换,在展向扰动函数 $g(z)$ 中的相变数 ϕ_l 和 ϕ_m 采用了介于0和1.0之间的随机数。

(3) 出口边界和上边界: 在这两个边界上都采用无反射边界条件^[11]。

(4) 展向边界: 在两个展向边界上采用周期性条件。

1.3 湍动能方程

在直接数值模拟的基础上,从湍动能方程出发,分析湍流场中可压缩效应对湍能的生成和耗散特征的影响。定义 \bar{f} 为 f 的 Reynolds 平均,该平均是沿周向平均后再进行时间平均。定义 $\bar{g} = \rho g/\bar{\rho}$ 为物理量 g 的 Favre 平均, ρ 为对应流场的密度。定义 $f' = f - \bar{f}$ 和 $g'' = g - \bar{g}$ 为脉动量。可压缩湍流动能方程(简称 k 方程)有以下形式:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}K) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}K\bar{u}_i) = P_{kk} + T_{kk} + \Pi_{kk} + D_{kk} - \varepsilon_{kk}. \tag{2}$$

其中

$$K = \frac{1}{2} \overline{\rho u''_i u''_i} / \bar{\rho}, \quad P_{kk} = -\overline{\rho u''_i u''_i} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i},$$

$$T_{kk} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho u''_i u''_i u''_i} \right), \quad \Pi_{kk} = -\overline{u''_i \frac{\partial p}{\partial x_i}},$$

$$D_{kk} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u''_i \tau_{ii}}), \quad \varepsilon_{kk} = \overline{\tau_{ii} \frac{\partial u''_i}{\partial x_i}},$$

$$\Pi_{kk} = \Pi_{kk1} + \Pi_{kk2} + \Pi_{kk3}, \quad \Pi_{kk1} = -\overline{u''_i \frac{\partial p}{\partial x_i}},$$

$$\Pi_{kk2} = \overline{p' \frac{\partial u''_i}{\partial x_i}}, \quad \Pi_{kk3} = -\overline{\frac{\partial}{\partial x_i} p' u''_i},$$

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_d + \varepsilon_s, \varepsilon_d = \frac{4}{3} \frac{\bar{\mu}}{Re} \overline{\left(\frac{\partial u''_i}{\partial x_i} \right)^2}, \varepsilon_s = \frac{\bar{\mu}}{Re} \overline{\omega''_i \omega''_i}.$$

式中, t 为无量纲时间; $x_i (i = 1, 2, 3)$ 为坐标 x, y 和 z ; $\bar{u}_i (i = 1, 2, 3)$ 为坐标 x, y 和 z 方向的 Favre 平均速度; K 为湍动能; $u''_i (i = 1, 2, 3)$ 为坐标 x, y 和 z 方向的脉动速度; p 为压力; τ_{ii} 为黏性应力张量的分量^[10]; p' 为脉动压力; $\bar{\mu}$ 为 Favre 平均黏度; Re 为雷诺数; $\omega''_i (i = 1, 2, 3)$ 为坐标 x, y 和 z 方向的脉动涡量; P_{kk} 为湍动能的生成项,代表雷诺应力通过平均运动的变形率向湍流脉动输入的平均能量,即表示了平均流能量和脉动动能之间的交换, $P_{kk} > 0$ 表示平均运动向脉动运动输入能量; T_{kk} 为湍流扩散项,也是脉动速度的三重相关项,代表由脉

动引起的湍动能的对流变化; Π_{kk} 为压力做功项,代表湍流脉动压力所作的功,它可分解为三项, Π_{kk1} 是平均压力所作的功,对于不可压流体该项为零,因为 $\overline{u''} = \overline{u'} = 0$,这里 u 表示流向(x 方向)速度,对于可压缩流动,因 $\bar{\rho} \neq 0$,虽然 $\overline{u'} = 0$,而 $\overline{u''} \neq 0$,此时 Π_{kk1} 是密度的非均匀性与平均压力的偶合项, Π_{kk2} 是压力-膨胀项,该项只有在可压缩流中不等于零,因为在不可压缩流中扰动速度的散度为零, Π_{kk3} 是压力-速度相关项,它反应了流场中声强的变化; D_{kk} 为黏性扩散项,代表黏性应力引起的湍动能的空间输运; ε_{kk} 为黏性耗散项,表示分子黏性把湍流动能转化为热,它可分解为膨胀-耗散 ε_d 和螺旋耗散 ε_r 两项,对不可压流动,膨胀-耗散 ε_d 为零,因扰动速度的散度为零。可以看出, T_{kk} 和 D_{kk} 项只表征湍动能的对流和输运特征,对湍能的生成和耗散特征没有影响。

1.4 离散方法

采用基于非等距网格的五阶精度的迎风紧致格式离散 Navier-Stokes 方程中的对流项;六阶精度的对称紧致格式离散黏性项;三步三阶精度的 Runge-Kutta 方法离散时间导数项,建立求解三维 Navier-Stokes 方程的高精度算法^[10]。

2 数值结果

所模拟的平板边界层的流动参数为:根据均匀来流条件定义计算雷诺数 $Re = 6.35 \times 10^5$,来流的马赫数 $M_\infty = 2.25$,平板上的温度 $T_w = 1.75$ 。

计算域为 $x \in [4.0, 9.5], y \in [0, 0.15]$ 和 $z \in [0, 0.35]$ 。在 x 和 y 方向均是非均匀的网格分布,在 z 方向是均匀的网格分布。计算网格点数是 $1280 \times 240 \times 80(x \times y \times z)$ 。 x 方向的最小网格间距 $\Delta x_{\min} = 2.78 \times 10^{-3}$, y 方向的最小网格间距 $\Delta y_{\min} = 9.52 \times 10^{-5}$ 。计算中 $x = 8.8$ (局部雷诺数为 $Re_x = 5.58 \times 10^6$) 的位置处于完全湍流区。在此处,利用壁面摩擦速度和流体黏性系数来归一化得到的 x 和 z 方向的网格间距分别为 $\Delta x_{\min}^+ = 9.52, \Delta z^+ = 9.52$, y 方向离开壁面的第一个网格点坐标是 $y^+ = 0.76$ 。

表 1 中给出了在 $x = 8.8$ 处的湍流边界层内各层所用的网格点数。其中, $\delta(\delta \approx 0.07)$ 表示 $x = 8.8$ 处的边界层厚度; ν 为动力黏度; u_τ 称为壁面摩擦速度,定义 $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho_w}$ (下标“w”表示壁面处的变量值), $\tau_w = \mu_w(\partial \bar{u}/\partial y)|_w$; μ 为运动黏度。

表 1 湍流边界层各层的网格点数

Table 1 Grid points of every layer in turbulent boundary layer

湍流边界层的各层	各层的范围	各层内分布的网格点数
黏性底层	$0 \leq y^+ \leq 5 \sim 8$	11
过渡层	$5 \sim 8 \leq y^+ \leq 30 \sim 50$	51
对数律层	$(30 \sim 50)\nu/u_\tau \leq y < 0.2\delta$	48
尾迹律区	$0.2\delta \leq y \leq 0.4\delta$	38
黏性顶层	$0.4\delta < y < \delta$	51

2.1 湍流统计平均结果及其分析

当流动达到统计平衡态(即各时均参数不再发生变化)后,对各物理量进行统计平均。由于流动只在展向取周期性的边界条件,因此只作展向的空间平均和时间平均。利用 49 000 个时间样本对可压缩平板湍流进行了统计分析。

图 2 为壁面摩擦系数 C_f 沿流向的分布。在 $x > 6.0$ 以后的流动转捩区,摩擦系数迅速升高,并在 $x \approx 7.8$ 处达到峰值,然后流动发展到充分发展的湍流区,壁面摩擦系数逐渐趋于平缓,达到湍流值。数值结果比较理想。

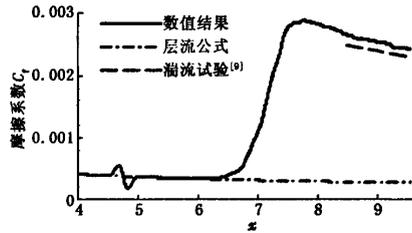


图 2 摩擦系数沿平板的分布

Fig. 2 Distribution of skin-friction along flat-plate

图 3 为 $x = 8.8$ 处的流向平均速度随坐标 y^+ 的分布。利用壁面摩擦速度 u_τ 对平均速度进行了归一化,结果符合线性律和对数律。

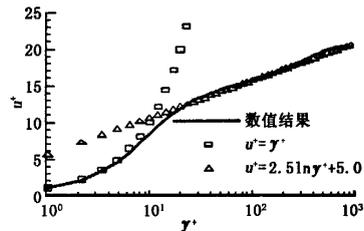


图 3 平均速度剖面

Fig. 3 Mean velocity profile

在图 4 中利用流向平均速度 \bar{u} 将湍流强度进行了归一化,并与不可压平板边界层的试验结果^[9]进行了比较。可以看出,流向、法向和展向的湍流强度,即 U_{rms}, V_{rms} 和 W_{rms} 与试验数据吻合得比较好。

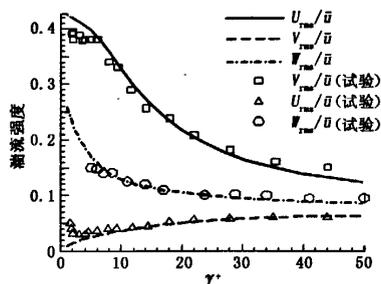


图4 湍流强度的分布

Fig. 4 Distribution of turbulence intensity

2.2 转换过程

图5为 $t = 8.66$ 时刻,流向涡 ω_x 在离开壁面第一个点处 ($y^+ = 0.76$) 等高面 (x, z) 上的等值线分布。可以看出,在施加小扰动区域 ($4.5 < x < 5.0$) 的下游,扰动经历了一个衰减过程。随着流动向下游发展,流动的失稳导致各阶扰动量被激发,在 $x \approx 6.0$ 开始有流向涡的形成,这表明三维结构开始形成。从流向涡的结构在展向的排列可以看出,其相邻涡之间具有相反的旋转方向,体现在涡量值的大小上则是正负相间的(图5,黑白条纹表示了 ω_x 的正负值)。随着流动的发展,流向涡在展向相互融合,导致了层流的破碎。由于存在黏性,产生的涡量将扩散到流体内部。在某些展向位置上流动离开壁面向上,使脉动振幅有最大值。在另一些展向位置上,流向涡使流动朝向壁面,脉动振幅最小。从展向位置上看,壁湍流中所形成的“猝发”现象是高速流体和低速流体相间的条带结构。图5表明,平板湍流边界层已经得到了充分的发展。

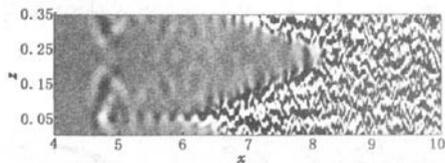


图5 $y^+ = 0.76$ 处 (x, z) 面上流向涡 ω_x 的等值线

Fig. 5 Contours of streamwise vorticity ω_x

in (x, z) plane at $y^+ = 0.76$

2.3 压缩性效应对拟序结构的影响

$8.5 \leq x \leq 9.5$ 区间的密度等值线(图6)清楚显示了流向剪切流动的物理现象,从中可以看到流体的上抛和下扫现象:靠近壁面的低密度流体射向外面;在近壁面低密度流体射向外流后,高密度的外部流动朝壁面进入边界层,且存有周期性,并且从图6中观察到了边界外层的间歇现象。

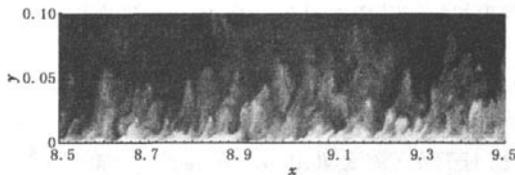


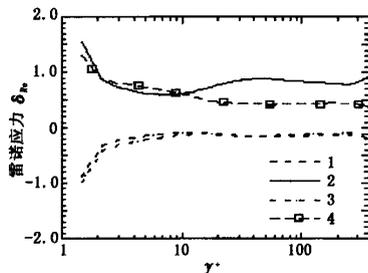
图6 $z = 0.044$ 处的 (x, y) 平面上的密度等值线

Fig. 6 Contours of density in (x, y)

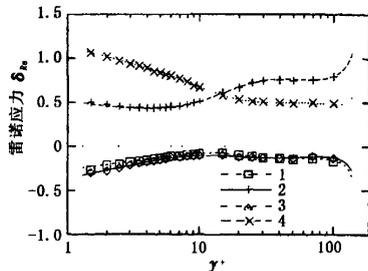
plane at $z = 0.044$

可以用瞬时的动量运输 ($-u', v'$) 来解释上抛和下扫对雷诺应力的贡献。为此可采用 Wallace 和 Brodkey 的象限分析法,即在 (u', v') 平面上,任何瞬时占据第二象限 ($u' < 0, v' > 0$) 的流体运动被称为上抛,而任何瞬时占据第四象限 ($u' > 0, v' < 0$) 的流体运动被称为下扫。

图7中给出了在 $x = 8.8$ 处,不同象限的雷诺应力在边界层内的分布,图中坐标 y^+ 取了对数,雷诺应力用当地雷诺应力进行了无量纲化,图中 1, 2, 3



(a) 可压缩平板湍流



(b) 不可压槽道湍流

图7 雷诺应力的分布

Fig. 7 Reynolds stress distribution

和 4 分别表示不同的象限。可见第二象限及第四象限的雷诺应力远比第一象限和第三象限的雷诺应力大,即湍流的雷诺应力主要来自于上抛和下扫的贡献。数值模拟结果表明在 $y^+ < 10$ 的壁面附近,下扫比上抛对雷诺应力的贡献要大一些。在 $15 \leq y^+ \leq 50$ 内,是湍流边界层的过渡层,湍流强度在增强,湍流脉动加剧,使得低速流体朝外运动,因此在此区域内上抛比下扫对雷诺应力的贡献要大很多,并且在

$y^+ \approx 37$ 处,上抛的作用最强。为了进一步说明在可压平板湍流边界层中上抛与下扫所具有的特点,可比较其与不可压缩壁湍流的差别。

从图7(a)中可以看到:在 $2 < y^+ < 10$ 内,下扫强于上抛,两者所相差的最大幅度约为16%,发生在 $y^+ \approx 5$ 附近;在 $y^+ > 10$ 的区间,上抛强于下扫,两者相差的最大幅度约为46%,发生在 $y^+ \approx 37$ 处。

在图7(b)中: $1.45 < y^+ < 14.0$ 时,下扫强于上抛,两者相差的最大幅度约为60%,发生在 $y^+ \approx 2$ 处; $y^+ > 15.0$ 时,上抛强于下扫,两者相差的最大幅度约为25%,发生在 $y^+ \approx 40$ 附近。

经以上比较,相对不可压槽道湍流而言,在可压平板湍流边界层中,上抛比下扫的作用更强,在湍流内层中占据更强的地位,范围也更大。这可能是压缩性效应影响的结果。

2.4 压缩性效应对平均流的影响

图8为 $M_\infty = 2.25$ 时,在 $x = 8.8$ 处的平均流向速度 \bar{u} , \tilde{u} 和平均温度 \bar{T} , \tilde{T} 的对比曲线。显然,在 \bar{u} 和

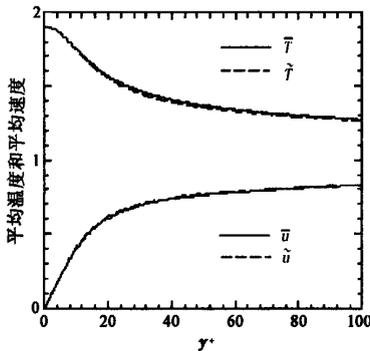


图8 平均温度和平均速度的分布

Fig.8 Distribution of averaged temperature and streamwise velocity

\tilde{u} 之间、 \bar{T} 和 \tilde{T} 之间都存在一定的差别。这说明在 $M_\infty = 2.25$ 的条件下,与不可压的流场相比,压缩性效应已经对平板湍流流场的平均流产生了影响。

图9为湍流马赫数 M_t 和均方根马赫数 M_{rms} 的分布。可知在 $M_\infty = 2.25$ 的条件下,可压缩平板湍流中的湍流马赫数 M_t 较小。此时对平均速度作Van Driest变换后(图3),其统计特征与不可压湍流很相似。因此,在本文中所模拟的可压平板湍流中,可压缩效应对湍流的影响是比较弱的,Morkovin假设成立。

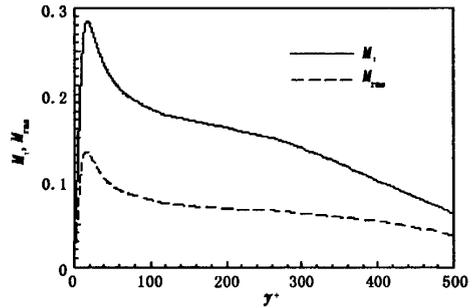


图9 M_t 和 M_{rms} 的分布

Fig.9 Distribution of M_t and M_{rms}

2.5 可压平板湍流中湍能的统计特征

图10为 $x = 8.8$ 处的湍流能量的平衡曲线。从图10(a)可见,在壁面附近,湍流生成项 P_{kk} 是主要的,压力做功项 Π_{kk1} , Π_{kk2} 和 Π_{kk3} 的作用很小。在靠近边界层外缘,各项都很小,这是因为湍流强度和雷诺应力都趋于零。图10(b)中给出了近壁特性的放大图。大约从黏性应力起主导作用转变为湍流应力起主导作用的地方(过渡层),即约 $y^+ = 13.4$ 处,湍流生成项有一个峰值,而在壁面上迅速衰减到零,因为那里湍流脉动趋于零。因此,湍流边界层的过渡层是主要的含能区,为壁面湍流的维持提供主要的能量。

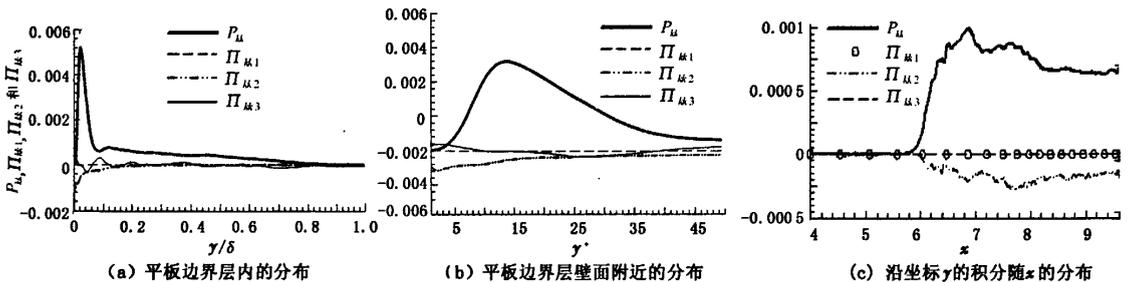


图10 P_{kk} , Π_{kk1} , Π_{kk2} 和 Π_{kk3} 的分布

Fig.10 Distribution of P_{kk} , Π_{kk1} , Π_{kk2} and Π_{kk3}

从图10(c)中可以清楚地看到湍动能的空间发展过程。在扰动带上游及下游附近是稳定的层流,没有湍流脉动,因此各项的值为零。随着扰动的发

展,在 $x > 6.0$ 以后, P_{kk} 的值急剧地上升,且有 $P_{kk} > 0$,说明平均运动在快速地向脉动运动输入能量,从而导致湍流的生成。在大约 $x > 7.8$ 后, P_{kk} 的值逐渐

趋于平缓,即表明湍流得到了充分发展。显然,在层流向湍流转换的过程中,湍动能的增长率最快。

图 11 为膨胀-耗散项与总黏性耗散项之比 ϵ_d/ϵ 和螺旋耗散项与总黏性耗散项之比 ϵ_s/ϵ 随坐标 y^+ 的分布。可见,膨胀-耗散项与总黏性耗散项相比是个小量,螺旋耗散项与总黏性耗散项相当。可以看出, $M_\infty = 2.25$ 时, Π_{kk1} , Π_{kk3} 和 ϵ_d 都非常小,影响湍能的生成和耗散特征的主要是统计平均量 P_{kk} 和 ϵ_s , 这表明 Morkvin 假设成立。然而,在近壁区 Π_{kk2} 和 Π_{kk3} 仍是不可忽略的量,这导致声的产生。在湍流的发展过程中压力-膨胀项 Π_{kk2} 仍是不可忽略的项,它反映了可压缩项对湍能所产生的抑制作用。这可能是可压缩壁湍流与不可压相比发展较慢的原因。

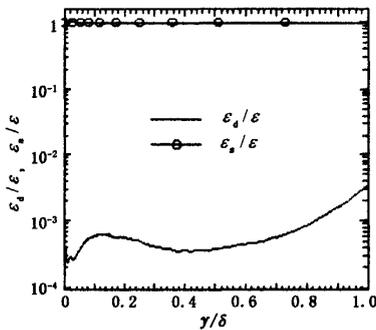


图 11 ϵ_d/ϵ 和 ϵ_s/ϵ 在边界层内的分布
Fig. 11 Distribution of ϵ_d/ϵ and ϵ_s/ϵ in boundary layer

2.6 可压平板湍流中的声压

声压的定义为 $\Delta p = (\bar{p} - p_\infty)/p_\infty$, 这里 \bar{p} 为压力 p 的 Reynolds 平均, p_∞ 为无穷远来流的压力。图 12 为物面声压 Δp 沿平板的分布。可见,随着边界层流动向下游的发展,在近壁区产生了脉动压力,因此边界层转换过程激发了由物面脉动压力所产生的偶极子声源。显然,在湍流区声压最大,噪声强度也最大,这也是人们要控制湍流的原因之一。

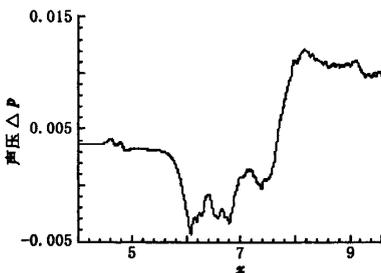


图 12 物面声压沿平板的分布
Fig. 12 Distribution of sound pressure at wall along flat-plate

3 结论

(1) 湍流场的一些统计平均结果充分证实了所建立的数值方法是有效的,所得数值结果是可靠的。

(2) $M_\infty = 2.25$ 的情况下, Morkvin 假设成立。在近壁区,压力-膨胀项和压力-速度相关项仍是不可忽略的量,这导致声的产生和可压缩效应对湍能所产生的抑制作用。

(3) 随流动向下游的发展,边界层转换过程激发了由物面脉动压力所产生的偶极子声源。在湍流区声压最大,噪声强度也最大,这也是控制湍流的原因之一。

参考文献:

[1] 王瑞和,倪红坚. 高压水射流破岩机理研究[J]. 石油大学学报:自然科学版,2002,26(4):118-122.
WANG Rui-he, NI Hong-jian. Research of rock fragmentation mechanism with high-pressure water jet[J]. Journal of the University of Petroleum, China (Edition of Natural Science), 2002,26(4):118-122.

[2] 马汉东,潘宏禄,王强. 超声速平板边界层斜波失稳转换过程研究[J]. 力学学报,2007,39(2):153-157.
MA Han-dong, PAN Hong-lu, WANG Qiang. The study of flow transition process induced by oblique wave instability in a supersonic flat-plate boundary layer[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2007,39(2):153-157.

[3] 曹伟,黄章峰,周恒. 超音速平板边界层转捩中层流突变为湍流的机理研究[J]. 应用数学和力学,2006(4):379-386.
CAO Wei, HUANG Zhang-feng, ZHOU Heng. Study of the mechanism of breakdown in laminar-turbulent transition of a supersonic boundary layer on a flat plate[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2006(4):379-386.

[4] 李新亮,傅德薰,马延文. 可压缩尖锥边界层湍流的直接数值模拟[J]. 中国科学:G 辑,2008,38(1):89-101.
LI Xin-liang, FU De-xun, MA Yan-wen. Direct numerical simulation of compressible boundary layer turbulence on a sharp cone[J]. Science in China (Ser G), 2008,38(1):89-101.

[5] 潘宏禄,马汉东,王强. 超声速边界层转捩拟序结构大涡模拟[J]. 宇航学报,2006,27(3):498-502.
PAN Hong-lu, MA Han-dong, WANG Qiang. Large eddy simulation of transition coherent structures in a supersonic boundary layer[J]. Journal of Astronautics, 2006,27(3):498-502.

(下转第 103 页)

两点边值问题,得到了带电小球在电场强度和电场方向变化时的最速降落轨迹。改变外场方向和强度可以明显改变小球的最速降落轨迹。讨论了最速降线为直线时电场强度与电场方向应满足的条件,求得了此时降落所需要的总时间。选择合适的电场强度和电场方向可以控制最速降线的形状,这对于精确打击、精确控制等有一定的参考价值。

参考文献:

- [1] HERRERA M D I. Galileo, Bernoulli, Leibniz and Newton around the brachistochrone problem [J]. *Rev Mexicana Fis*, 1994,40(3):459-475.
- [2] DIETZ P. Die Ursprünge der variationsrechnung bei Jakob Bernoulli [J]. *Verh Naturf Ges Basel*, 1959,70:81-146.
- [3] ERLICHSON H. Johann Bernoulli's brachistochrone solution using Fermat's principle of least time [J]. *European J Phys*, 1999,20(5):299-304.
- [4] PEDERSEN K, PEDERSEN K M. The early history of the calculus of variations (Danish) [J]. *Nordisk Ma Tidsskr*, 1971,19:61-74.
- [5] THIELE R. Das Zerwürfnis Johann Bernoullis mit seinem Bruder Jakob, natur, mathematik und geschichte [J]. *Acta Hist Leopold*, 1997,27:257-276.
- [6] 谢小良. 最速降线方法在随机故障控制模型中的应用 [J]. *知识丛林*, 2007(9):143-144.
- XIE Xiao-liang. Application of the brachistochrone method in the random fault controlling model [J]. *Knowledge Forest*, 2007(9):143-144.
- [7] 李怀坝. 最速降线及反宇屋面 [J]. *新建筑*, 1993(3):51-59.
- LI Huai-xun. The brachistochrone and the inverse cosmic building surface [J]. *New Building*, 1993(3):51-59.
- [8] 王鲁民, 马彬. 答《最速降线及反宇屋面》 [J]. *新建筑*, 1995(1):49-50.
- WANG Lu-min, MA Bin. Reply to "the brachistochrone and the inverse cosmic building surface" [J]. *New Building*, 1995(1):49-50.
- [9] 尤明庆. 最速降线求解和摩擦力影响的研究 [J]. *河南理工大学学报*, 2005,24(1):83-88.
- YOU Ming-qing. Investigation on the solution of the brachistochrone and the effect of the friction force [J]. *Journal of the University of Henan Technology*, 2005,24(1):83-88.
- [10] WENSRICH C M. Evolutionary solutions to the brachistochrone problem with coulomb friction [J]. *Mech Res Commun*, 2004,31:151-159.
- [11] STALFORD H L, GARRETT Jr F E. Classical differential geometry solution of the brachistochrone tunnel problem [J]. *J Optimiz Theory App*, 1994,80(2):227-260.
- (编辑 沈玉英)
-
- (上接第94页)
- [6] GUARINI S E, MOSER R D, SHARIFF K, et al. Direct numerical simulation of a supersonic turbulent boundary layer at Mach 2.5 [J]. *Journal of Fluid Dynamics*, 2000, 414:1-33.
- [7] WANG Meng, LELE Sanjiva K, MOIN Parviz. Sound radiation during local laminar breakdown in a low-Mach number boundary layer [J]. *Journal of Fluid Dynamics*, 1996,319:197-218.
- [8] RAI M M, MOIN P. Direct numerical simulation of transition and turbulence in a spatially evolving boundary layer [J]. *Journal of Fluid Dynamics*, 1993,109:169-192.
- [9] RAI M M, GATSKI T B, ERLEBACHER G. Direct simulation of spatially evolving compressible turbulent boundary layers: AIAA, Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 33rd, Reno, NV, Jan 9-12, 1995 [C]. United States, 1995.
- [10] 傅德薰, 马延文. 计算流体力学 [M]. 北京:高等教育出版社, 2002.
- [11] 李新亮, 傅德薰, 马延文. 可压缩钝楔边界层转捩到湍流的直接数值模拟 [J]. *中国科学:G 辑*, 2004,34(4):466-480.
- LI Xin-liang, FU De-xun, MA Yan-wen. Direct numerical simulation of compressible boundary layer transition to turbulence on a blunt cone [J]. *Science in China (Ser G)*, 2004,34(4):466-480.
- (编辑 李志芬)