

文章编号:1673-5005(2008)06-0057-05

频率域 2.5 维电磁测深有限元模拟中的吸收边界条件

薛东川, 戴世坤

(中国石油大学 CNPC 物探重点实验室, 北京 102249)

摘要:针对频率域 2.5 维电磁测深问题,借鉴地震波模拟中吸收边界的处理方法,将波数域电磁场方程分解成两个传播方向相反的单程波方程,以沿边界外法向衰减的单程波方程作为该边界上的吸收边界条件。给出了全吸收边界条件的构造方法,并导出了 15° 吸收边界的具体形式。数值计算结果表明,该吸收边界条件使边界反射得到了有效压制,在相同的计算量下计算精度显著提高。

关键词:吸收边界条件; 2.5 维; 电磁测深; 有限元方法

中图分类号:P 631.325

文献标识码:A

Absorbing boundary condition for simulating 2.5-D electromagnetic sounding in frequency domain by finite element method

XUE Dong-chuan, DAI Shi-kun

(Key Laboratory of Geophysical Exploration of China National Petroleum Corporation,
China University of Petroleum, Beijing 102249, China)

Abstract: Referring to the method of constructing absorbing boundary condition in seismic wave modeling, absorbing boundary condition for simulating 2.5-D electromagnetic sounding in frequency domain was studied by finite element method. Electromagnetic equation was decomposed into two reverse direction one-way wave equations in wavenumber domain. Then, the one-way equation, which decayed along the outer normal direction was treated as the absorbing boundary condition of that boundary. The method how to construct full absorbing boundary condition was given, and 15° absorbing boundary condition was formulated. Numerical results indicate that this boundary condition effectively suppresses reflection and improves solution accuracy remarkably.

Key words: absorbing boundary condition; 2.5-D; electromagnetic sounding; finite element method

2.5 维电磁问题研究三维源在二维构造中的电磁响应,是二维问题与三维问题的一种折中,它兼顾了物理的真实性和计算成本。目前这种模型是解释二维构造可控源电磁数据比较合适的方法。求解 2.5 维问题的一般步骤是沿着构造走向作 Fourier 变换,将空间域的 2.5 维问题变换为波数域的二维问题。选取不同波数,求解波数域的二维问题,再通过 Fourier 反变换得到空间域的解。Stoyer^[1], Lee^[2], Leppin^[3], Unsworth^[4], Mitsuhashi^[5] 和王华军^[6] 等人先后用有限差分法和有限元法研究了磁线圈和接地线电流源在二维构造中时间域和频率域的电磁响应。在他们所做工作中,边界影响一直没

有得到很好解决。目前,截断边界上较常使用的边界条件有两类,一类是衰减边界,另一类是吸收边界(或透射边界)。Cerjan^[7] 通过逐渐削弱边界段入射波振幅来实现无反射的边界条件。Berenger^[8] 在研究电磁波传播情况时提出完全匹配层边界条件。吸收边界条件是以单程波近似方程作为截断边界上的边界条件,使边界上只有向外传播的波。事实上,只有在介质均匀的情况下,才能显式地将波动方程分解为两个反方向传播的单程波,而且边界条件的实际吸收效果(主要指吸收入射角)也与单程波近似方程的选择有关。Clayton^[9], Reynolds^[10] 根据波动方程旁轴近似理论提出了关于声波和弹性波方程的

收稿日期:2008-03-12

作者简介:薛东川(1979-),男(汉族),四川绵阳人,博士研究生,从事复杂地质条件下的电磁、地震数值模拟和成像方法研究。

吸收边界条件。笔者借鉴地震波模拟中吸收边界的处理方法,采用行波分解法推导频率域 2.5 维电磁有限元模拟的吸收边界条件。

1 2.5 维电磁测深有限元控制方程

设时间因子为 $e^{i\omega t}$, 在含源的均匀各向同性介质中, 频率域的电场 E 和磁场 H 满足方程

$$\nabla \times E = -zH - zM_s \quad (1)$$

和

$$\nabla \times H = yE + J_s \quad (2)$$

其中

$$z = i\mu\omega, \quad y = \sigma + i\varepsilon\omega.$$

式中, z 代表阻抗率; y 代表导纳率; μ 为磁导率; ω 为角频率; σ 为电导率; ε 为介电常数; M_s 为源磁极化强度; J_s 为源电流密度。

设直角坐标系下, 坐标轴 y 平行构造走向, 物性只是 x, z 的函数。对方程(1), (2) 关于 y 作一维 Fourier 变换

$$\hat{F}(x, k_y, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y, z, \omega) e^{-ik_y y} dy \quad (3)$$

就得到波数域的二维问题。根据 Mitsuhashi 的推导^[5], 波数域中的有限元控制方程可表示为

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{D_e} \left\{ \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \left(\frac{y}{k_e^2} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \left(\frac{y}{k_e^2} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} \right) + \right. \\ & N_i^e y \hat{E}_y + \frac{ik_y}{k_e^2} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} - \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial x} \right) \Big\} dx dz = \\ & - \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{D_e} \left\{ N_i^e J_y + \frac{ik_y}{k_e^2} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \hat{J}_x + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \hat{J}_z \right) + \right. \\ & \left. \frac{k^2}{k_e^2} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial z} \hat{M}_x - \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \hat{M}_z \right) \right\} dx dz + \\ & \sum_{e=1}^{N_e} \oint_{\partial D_e} N_i^e (-\hat{H}_x n_x + \hat{H}_z n_z) dl, \quad (4) \\ & \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{D_e} \left\{ \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \left(\frac{z}{k_e^2} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \left(\frac{z}{k_e^2} \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} \right) + \right. \\ & N_i^e z \hat{H}_y + \frac{ik_y}{k_e^2} \left(-\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} \right) \Big\} dx dz = \\ & - \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{D_e} \left\{ N_i^e \hat{M}_y + \frac{ik_y z}{k_e^2} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \hat{M}_x + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \hat{M}_z \right) + \right. \\ & \left. \frac{z}{k_e^2} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial z} \hat{J}_x - \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \hat{J}_z \right) \right\} dx dz - \\ & \sum_{e=1}^{N_e} \oint_{\partial D_e} N_i^e (\hat{E}_x n_x - \hat{E}_z n_z) dl, \quad (5) \end{aligned}$$

$$\hat{E}_x = \frac{1}{k_e^2} \left(-ik_y \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} - z \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} - z \hat{J}_x - ik_y z \hat{M}_x \right),$$

$$\hat{E}_z = \frac{1}{k_e^2} \left(-ik_y \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} + z \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial x} - z \hat{J}_z + ik_y z \hat{M}_z \right),$$

$$\hat{H}_x = \frac{1}{k_e^2} \left(-ik_y \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial x} + y \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial z} + k^2 \hat{M}_x + ik_y \hat{J}_x \right),$$

$$\hat{H}_z = \frac{1}{k_e^2} \left(-ik_y \frac{\partial \hat{H}_y}{\partial z} - y \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} + k^2 \hat{M}_z - ik_y \hat{J}_z \right),$$

$$k^2 = -zy, \quad k_e^2 = k_y^2 - k^2.$$

式中, N_i^e 代表第 i 个节点上位于第 e 个单元内的插值函数; n_x, n_z 分别为边界外法线的方向余弦; D_e 代表有限元单元 e , ∂D_e 代表单元 e 的边界。

从方程(4) ~ (5) 可以看出, 对偶控制方程(4), (5) 只包含波数域电场和磁场的 y 分量, 求解后可得到波数域的其余分量, 再经过 Fourier 反变换

$$F(x, y, z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(x, k_y, z, \omega) e^{ik_y y} dk_y, \quad (6)$$

即可到空间域电场和磁场的全部分量。

在前人的工作中, 截断边界取 Dirichlet 零边界条件。为减小边界反射对目标区域的影响, 边界总是取得很远。这样既增加了计算量, 计算精度也受到一定影响。

2 吸收边界条件的推导

设时间因子为 $e^{i\omega t}$, 在无源的均匀各向同性介质中, 频率域的电场和磁场满足齐次的 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0 \quad (7)$$

和

$$\nabla^2 H + k^2 H = 0. \quad (8)$$

其中

$$k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 - i\mu\sigma\omega.$$

以电场方程为例, 对方程(7) 关于 x, y 作二维 Fourier 变换

$$\tilde{E}(k_x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y, z) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy, \quad (9)$$

得

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2 - k_y^2) \tilde{E} = 0. \quad (10)$$

方程(10) 存在如下通解:

$$\tilde{E} = \tilde{E}_0^- e^{i\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z} + \tilde{E}_0^+ e^{-i\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z}. \quad (11)$$

式中, $\tilde{E}_0^-, \tilde{E}_0^+$ 为任意常矢。

令

$$\alpha - i\beta = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2},$$

因 $\mu, \varepsilon, \omega, \sigma$ 为正实数, k_x 和 k_y 均为实数, $k^2 - k_x^2 - k_y^2$ 只能在复平面上第三和第四象限取值, 所以 α, β 必为正实数。故式(11) 表示, 均匀各向同性介质中, 解

由两个传播方向相反的波组成,其中一个沿 z 轴负方向衰减,称作上行波,记作 $\bar{E}_u$,即 $\bar{E}_u = \bar{E}_0^- \times e^{i\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}z}$;另一个沿 z 轴正方向衰减,称作下行波,记作 $\bar{E}_d$,即 $\bar{E}_d = \bar{E}_0^+ e^{-i\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}z}$ 。

在推导有限元控制方程时,为了降低对解的连续性要求,总是通过格林公式作分部积分,将对解的连续性要求转化为对权函数的连续性要求。此时边界项会出现场函数法向导数沿边界的积分,如电场控制方程(4)上边界 b_1 上包含 $\int_{b_1} \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial z} dx$ 项,令上边界只有上行波,故

$$\frac{\partial \bar{E}_u}{\partial z} = i\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \bar{E}_u. \quad (12)$$

令 $F(k_x) = \sqrt{(k^2 - k_y^2) - k_x^2}$,在 $k_x = 0$ 的邻域内 $F(k_x)$ 有如下 Maclaurin 展开式:

$$F(k_x) = \sqrt{k^2 - k_y^2} - \frac{k_x^2}{2\sqrt{k^2 - k_y^2}} + \lambda(k_x). \quad (13)$$

式中,等号右边第一项称作零阶近似,代表垂直入射的波;第二项称作二阶近似,代表与界面法向呈一定角度入射的波; $\lambda(k_x)$ 是比 k_x^3 高阶的小量。

随着展开项的增多,式(13)代表更大入射角度的入射波,一直逼近 90° 入射的各方向的入射波。

舍去比 k_x^3 高阶的小量(地震中常称作 15° 近似),将式(13)带入式(12),作关于 k_x 一维 Fourier 反变换,得

$$\frac{\partial \bar{E}_u}{\partial z} = i\sqrt{k^2 - k_y^2} \bar{E}_u + \frac{i}{2\sqrt{k^2 - k_y^2}} \frac{\partial^2 \bar{E}_u}{\partial x^2}. \quad (14)$$

电场控制方程(4)和磁场控制方程(5)的边界项分别为

$$\sum_{\epsilon=1}^{N_\epsilon} \oint_{\partial D_\epsilon} N_i^* (-\dot{H}_i n_x + \dot{H}_x n_i) dl, \quad (15)$$

$$\sum_{\epsilon=1}^{N_\epsilon} \oint_{\partial D_\epsilon} N_i^* (\dot{E}_i n_x - \dot{E}_x n_i) dl. \quad (16)$$

如图1所示,上边界 $n_x = 0, n_z = -1$,边界上无源,式(15), (16)可化为

$$\begin{aligned} & \sum \int_{b_1} -N_i^* \dot{H}_x dx = \\ & \sum \int_{b_1} -N_i^* \left(-\frac{ik_y}{k_e^2} \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} + \frac{\dot{H}_y}{k_e^2} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} \right) dx, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \sum \int_{b_1} N_i^* \dot{E}_x dx = \sum \int_{b_1} N_i^* \left(-\frac{ik_y}{k_e^2} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\dot{E}_y}{k_e^2} \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} \right) dx. \end{aligned} \quad (18)$$

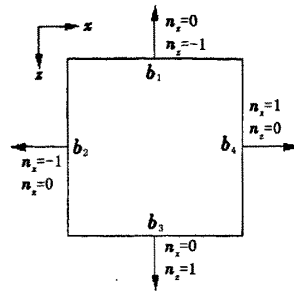


图1 模型边界示意图

Fig. 1 Outer boundary of computational domain

如式(14),上边界只有上行波,故

$$\frac{\partial \bar{E}_y}{\partial z} = i\left(\sqrt{k^2 - k_y^2} \bar{E}_y + \frac{1}{2\sqrt{k^2 - k_y^2}} \frac{\partial^2 \bar{E}_y}{\partial x^2}\right), \quad (19)$$

$$\frac{\partial \bar{H}_y}{\partial z} = i\left(\sqrt{k^2 - k_y^2} \bar{H}_y + \frac{1}{2\sqrt{k^2 - k_y^2}} \frac{\partial^2 \bar{H}_y}{\partial x^2}\right). \quad (20)$$

将式(19)代入式(17)得电场控制方程(4)上边界 b_1 上的吸收边界条件为

$$\begin{aligned} & \sum \int_{b_1} -N_i^* \dot{H}_x dx = \sum \int_{b_1} -N_i^* \left[-\frac{ik_y}{k_e^2} \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} + \right. \\ & \left. \frac{\dot{H}_y}{k_e^2} (+i) \left(\sqrt{k^2 - k_y^2} \bar{E}_y + \frac{1}{2\sqrt{k^2 - k_y^2}} \frac{\partial^2 \bar{E}_y}{\partial x^2} \right) \right] dx. \end{aligned} \quad (21)$$

将式(20)代入式(18)得磁场控制方程(5)上边界 b_1 上的吸收边界条件为

$$\begin{aligned} & \sum \int_{b_1} N_i^* \dot{E}_x dx = \sum \int_{b_1} N_i^* \left[-\frac{ik_y}{k_e^2} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \right. \\ & \left. \frac{\dot{E}_y}{k_e^2} (+i) \left(\sqrt{k^2 - k_y^2} \bar{H}_y + \frac{1}{2\sqrt{k^2 - k_y^2}} \frac{\partial^2 \bar{H}_y}{\partial x^2} \right) \right] dx. \end{aligned} \quad (22)$$

同理,用下行波作为下边界条件,左行波作为左边界条件,右行波作为右边界条件。通过类似推导,可以得到各自的吸收边界条件。

电场控制方程(4)下边界 b_3 上的吸收边界条件为

$$\begin{aligned} & \sum \int_{b_3} N_i^* \dot{H}_x dx = \sum \int_{b_3} N_i^* \left[-\frac{ik_y}{k_e^2} \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} + \right. \\ & \left. \frac{\dot{H}_y}{k_e^2} (-i) \left(\sqrt{k^2 - k_y^2} \bar{E}_y + \frac{1}{2\sqrt{k^2 - k_y^2}} \frac{\partial^2 \bar{E}_y}{\partial x^2} \right) \right] dx; \end{aligned} \quad (23)$$

磁场控制方程(5)下边界 b_3 上的吸收边界条件为

$$\sum \int_{b_3} -N_i^* \dot{E}_x dx = \sum \int_{b_3} -N_i^* \left[-\frac{ik_y}{k_e^2} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \right.$$

$$\frac{z}{k_e^2}(-i)\left(\sqrt{k^2-k_y^2}\dot{H}_y+\frac{1}{2\sqrt{k^2-k_y^2}}\frac{\partial^2\dot{H}_y}{\partial x^2}\right)]dx; \quad (24)$$

电场控制方程(4)左边界 b_2 上的吸收边界条件

$$\sum \int_{b_2} N_i^* \dot{H}_z dz = \sum \int_{b_2} N_i^* \left[-\frac{ik_y}{k_e^2} \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} - \frac{\hat{y}}{k_e^2} (+i) \left(\sqrt{k^2-k_y^2} \dot{E}_y + \frac{1}{2\sqrt{k^2-k_y^2}} \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z^2} \right) \right] dz; \quad (25)$$

磁场控制方程(5)左边界 b_2 上的吸收边界条件为

$$\sum \int_{b_2} -N_i^* \dot{E}_z dz = \sum \int_{b_2} -N_i^* \left[-\frac{ik_y}{k_e^2} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} + \frac{z}{k_e^2} (+i) \left(\sqrt{k^2-k_y^2} \dot{H}_y + \frac{1}{2\sqrt{k^2-k_y^2}} \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial z^2} \right) \right] dz; \quad (26)$$

电场控制方程(4)右边界 b_4 上的吸收边界条件为

$$\sum \int_{b_4} -N_i^* \dot{H}_z dz = \sum \int_{b_4} -N_i^* \left[-\frac{ik_y}{k_e^2} \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} - \frac{\hat{y}}{k_e^2} (-i) \left(\sqrt{k^2-k_y^2} \dot{E}_y + \frac{1}{2\sqrt{k^2-k_y^2}} \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z^2} \right) \right] dz; \quad (27)$$

磁场控制方程(5)右边界 b_4 上的吸收边界条件为

$$\sum \int_{b_4} N_i^* \dot{E}_z dz = \sum \int_{b_4} N_i^* \left[-\frac{ik_y}{k_e^2} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} + \frac{z}{k_e^2} (-i) \left(\sqrt{k^2-k_y^2} \dot{H}_y + \frac{1}{2\sqrt{k^2-k_y^2}} \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial z^2} \right) \right] dz. \quad (28)$$

方程(21)~(28)即为频率域 2.5 维电磁问题的 15° 吸收边界条件。将边界上的单元线积分组集到总体刚度矩阵中,便实现了吸收边界条件的加载。

3 数值计算

均匀各向同性介质中,电导率 $\sigma = 0.1 \text{ S/m}$,介电常数 $\varepsilon = 8.854 \text{ pF/m}$,磁导率 $\mu = 0.4\pi \text{ }\mu\text{H/m}$,沿 x 方向的有限长线电流源置于 $|(x,z)| - 12.5 \leq x \leq 12.5, z = 0|$,电流强度 $I = 1 \text{ A}$,频率 $f = 10 \text{ Hz}$ 。此时,沿构造走向的电磁场解析式可表示为^[11]

$$E_y = \frac{Ids}{4\pi\sigma r^3} e^{-ikr} \left[\frac{xy}{r^2} (-k^2 r^2 + 3ikr + 3) \right],$$

$$H_y = \frac{Ids}{4\pi r^2} (ikr + 1) e^{-ikr} \left(-\frac{z}{r} \right).$$

式中, ds 为电偶极轴长; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 为到原点的距离。

500 m 旁侧剖面上的电场 y 分量的解析解、Dirichlet 零边界数值解和 15° 吸收边界数值解见图 2。

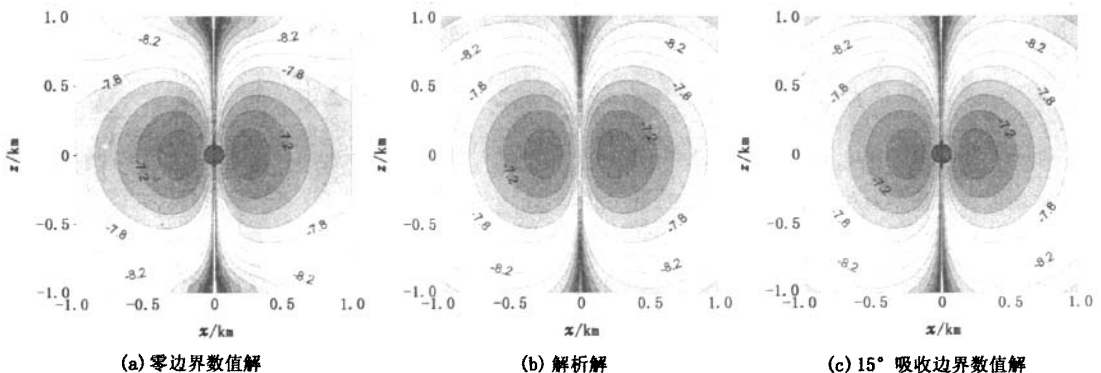


图 2 500 m 剖面上电场 y 分量 Dirichlet 零边界数值解、解析解、吸收边界数值解对比

Fig. 2 Numerical solution of electric field y component in Dirichlet zero-boundary condition, analytical and absorbing boundary condition of 500 m section

解析解等值线呈左右两组镜像的近似椭圆分布;对应的 Dirichlet 零边界数值解仅在距边界较远的区域与解析解相符,而边界上产生的全反射使等值线变形向外延伸;15° 吸收边界数值解边界上的反射得到了有效压制,等值线形态与解析解保持一致。需要说明的是,解析解的源是理想的电偶极源,

而数值解的源是有限长线电流源,在距离源很近的位置不能再将有限长线电流源看作电偶极源,所以数值解与解析解在源附近存在较大差异。500 m 旁侧剖面上的磁场 y 分量的解析解、Dirichlet 零边界数值解和 15° 吸收边界数值解的等值线分布见图 3。其中,解析解等值线呈上下两组镜像的近似椭圆分

布;Dirichlet零边界数值解与解析解差别很大,由于磁场是纯感应场,衰减不如电场快,所以边界上的反射能量也较电场更强;而采用吸收边界的数值解

(图3(c))形态却仍与解析解保持一致。可见,采用吸收边界条件后,计算精度得到了显著提高。

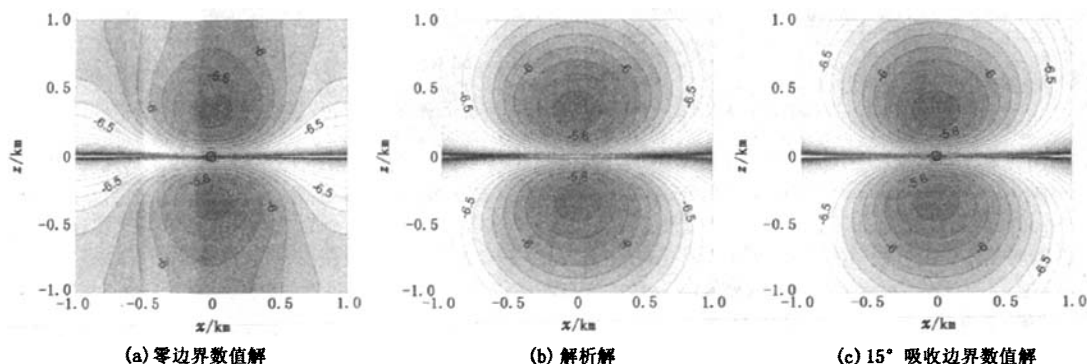


图3 500 m剖面上磁场y分量Dirichlet零边界数值解、解析解、吸收边界数值解对比

Fig.3 Numerical solution of magnetic field y componet in Dirichlet zero-boundary condition, analytical and absorbing boundary condition of 500 m section

4 结束语

针对频率域2.5维电磁测深问题,借鉴地震波模拟中吸收边界的处理方法,将波数域电磁场方程分解成两个传播方向相反的单程波方程,以沿边界外法向衰减的单程波方程作为该边界上的吸收边界条件,给出了全吸收边界条件的构造方法,并导出了15°吸收边界的具体形式。该吸收边界条件能够有效压制边界反射,显著提高计算精度。现已将该方法推广应用到大地电磁和可控源音频大地电磁数据反演,由于该方法使正演计算区域与反演解释目的区域相同,因而取得了在保证成像质量的同时,反演速度大大提高的效果。

参考文献:

- [1] STOYER C H, GREENFIELD R J. Numerical solutions of the response of a two-dimensional earth to an oscillating magnetic dipole source[J]. *Geophysics*, 1976,41(3): 519-530.
- [2] LEE K H, MORRISON H F. A numerical solution for the electromagnetic scattering by a two-dimensional inhomogeneity[J]. *Geophysics*, 1985,50(3):466-472.
- [3] LEPPIN M. Electromagnetic modeling of 3-D sources over 2-D inhomogeneities in the time domain[J]. *Geophysics*, 1992,57(8):994-1003.
- [4] UNSWORTH M J, TRAVIS B J, CHAVE A D. Electro-magnetic induction by a finite electric dipole source over a

2-D earth[J]. *Geophysics*, 1993(2),58:198-214.

- [5] MITSUHASHI Y. 2-D electromagnetic modeling by finite-element method with a dipole source and topography[J]. *Geophysics*, 2000,65(2):465-475.
- [6] 王华军, 罗延钟. 中心回线瞬变电磁法2.5维有限单元算法[J]. *地球物理学报*, 2003,46(6):855-862.
WANG Hua-jun, LUO Yan-zhong. Algorithm of a 2.5 dimensional finite element method for transient electromagnetic with a central loop[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2003,46(6):855-862.
- [7] CERJAN C, KOSLOFF D, KOSLOFF R, et al. A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equation[J]. *Geophysics*, 1985,50(4):705-708.
- [8] BERENGER J P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves[J]. *Journal of Computational Physics*, 1994,114(2):185-200.
- [9] CLAYTON R, ENQUIST B. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equation[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1977,67(6): 1529-1540.
- [10] REYNOLDS A C. Boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems[J]. *Geophysics*, 1978,43(6):1099-1110.
- [11] 米萨克 N 纳比吉安. 勘查地球物理电磁法(第一卷)理论[M]. 赵经祥,译. 北京:地质出版社, 1992: 155-162.

(编辑 沈玉英)