文章编号:1673-5005(2007)04-0168-05

块斜循环矩阵预条件方程组的快速算法

鲍文娣, 李维国

(中国石油大学 数学与计算科学学院,山东 东营 257061)

摘要:应用快速 Hartley 变换和快速 W 变换得到了一种新的求解 mn 阶块斜循环矩阵预条件方程组的快速算法,其计算复杂度为 $O(mn\log_2(mn))$。特别的,当 $m=1$ 时,新算法所需运算量仅为预优迭代算法的$\frac{1}{5}$。

关键词:块斜循环矩阵; 预条件方程组; 快速 W 变换算法

中图分类号: O 241.6　　**文献标识码**:A

Fast solution of block skew circular preconditioned equations

BAO Wen-di, LI Wei-guo

(*Department of Mathematics and Computational Science in China University of Petroleum, Dongying* 257061, *Shandong Province, China*)

Abstract: A new fast Hartley transform (FHT) and fast W transform (FWT) algorithm for solving block skew circular preconditioned equations of order mn was obtained. Its arithmetic complexity is $O(mn\log_2(mn))$. Especially, when $m=1$, the operation cost of the new algorithm is about $\frac{1}{5}$ of the preconditioned iterative method.

Key words: block skew circular matrix; preconditioned equations; fast W transform algorithm

循环矩阵是一类很重要的特殊矩阵,它在数字图像处理[1]、线性预测、误差控制码中起着重要的作用,而循环分块矩阵在计算机时序模型滤波器设计中经常出现,因而,近年来对这类矩阵的特性及有关快速算法的研究,引起了人们的普遍重视。成礼智等[2]给出了一种循环类预条件方程组的快速算法,张耀明[3]研究了块循环矩阵方程组的算法,而 T K Ku 则利用预优矩阵和快速 Fourier 变换(FFT)讨论了斜循环矩阵预条件方程组的求解方法[4]。笔者利用快速 Hartley 变换(FHT)和快速 W 变换(FWT)给出一种求解 mn 阶块斜循环预条件方程组的新的快速算法。

1 引理与算法推导

定义 1 实数域上分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & \cdots & A_{n-1} \\ rA_{n-1} & A_0 & A_1 & \cdots & \vdots \\ rA_{n-2} & rA_{n-1} & A_0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & A_1 \\ rA_1 & \cdots & rA_{n-2} & rA_{n-1} & A_0 \end{pmatrix}$$

称为块 r-循环矩阵,其中 $A_i\,(i=0,1,2,\cdots,n-1)$ 为 m 阶矩阵,简记 $A=BC_r(A_0,A_1,\cdots,A_{n-1})$;当 $r=-1$ 时,A 为块斜循环矩阵,记为 $A=BC_{-1}(A_0,A_1,\cdots,A_{n-1})$;当 $m=1,r=1$ 时,A 为循环矩阵,记为 $A=\mathrm{Cir}(A_0,A_1,\cdots,A_{n-1})$;当 $m=1,r=-1$ 时,A 为斜循环矩阵,记为 $A=\mathrm{Cir}_{-1}(A_0,A_1,\cdots,A_{n-1})$。

令 $\hat{J}_j=(\hat{J}_{i,k}^{(j)})_{n\times n}, j=1,2,3$ 为 n 阶矩阵,其元素分别为

$$\hat{J}_{i,k}^{(1)}=\begin{cases}1, & i+k=n-1, 0\le i,k\le n-1, \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

收稿日期:2006-12-20

基金项目:山东省自然科学基金(Q99A09)

作者简介:鲍文娣(1979-),女(汉族),河北武邑人,助教,硕士,研究方向为矩阵计算。

$$\hat{J}_{i,k}^{(2)}=\begin{cases}1,\ i=k=0,\\-1,\ i+k=n,1\leqslant i,k\leqslant n-1,\\0,\ \text{其他}.\end{cases}$$

$$\hat{J}_{i,k}^{(3)}=\begin{cases}1,\ i=0,k=n-1,\\-1,\ i-k=1,0<i\leqslant n-1,0\leqslant k<n-1,\\0,\ \text{其他}.\end{cases}$$

记

$$\boldsymbol{J}_j=\hat{\boldsymbol{J}}_j\otimes\boldsymbol{I}_m,\ j=1,2,3,\tag{1}$$

且定义 $\boldsymbol{J}_2^+=(\hat{J}_{i,k})_{n\times n}$ 为 n 阶置换矩阵,其元素分别为

$$\hat{J}_{i,k}=\begin{cases}1,\ i=k=0,\\1,\ i+k=n,1\leqslant i,k\leqslant n-1,\\0,\ \text{其他}.\end{cases}\tag{2}$$

考虑下列 mn 阶块斜循环预条件方程组:

$$(\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{J}_1\boldsymbol{C}_2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\tag{3}$$

其中,$\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{BC}_{-1}(\boldsymbol{C}_1(0),\boldsymbol{C}_1(1),\cdots,\boldsymbol{C}_1(n-1))$,$\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{BC}_{-1}(\boldsymbol{C}_2(0),\boldsymbol{C}_2(1),\cdots,\boldsymbol{C}_2(n-1))$ 均为 mn 阶块斜循环矩阵,且 $\boldsymbol{C}_i(k),i=1,2;k=0,1,\cdots,n-1$ 为 m 阶循环矩阵,$\boldsymbol{J}_1$ 由式(1)给出。

首先引进离散 H 变换(DHT)[5]、离散 W 变换(DWT)及广义 DWT 的概念。

设 $x(i),i=0,1,\cdots,n-1$ 是一个实序列,其离散 Hartley 变换(DHT)定义为

$$X(k)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=0}^{n-1}x(i)cas\left(\frac{2ki\pi}{n}\right),\ k=0,1,\cdots,n-1.$$

其中,$cas(\alpha)=\cos(\alpha)+\sin(\alpha)$,变换矩阵

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\sqrt{n}}cas\left(\frac{2ki\pi}{n}\right)_{k,i=0}^{n-1,n-1}\tag{4}$$

称之为 Hartley 变换矩阵,易证 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}$。

实序列 $a(i),i=0,1,\cdots,n-1$ 的 DWT[6] 定义为

$$A(k)=\sqrt{\frac{2}{n}}\sum_{i=0}^{n-1}a(i)w_{k,i},\tag{5}$$

其中 $w_{k,i}=\sin\left[\frac{\pi}{4}+(i+\alpha)(k+\beta)\frac{2\pi}{n}\right],k=0,1,\cdots,n-1$,$\alpha,\beta$ 为实数,变换矩阵

$$\hat{\boldsymbol{W}}^{\alpha,\beta}=\sqrt{\frac{2}{n}}[w_{k,i}]_{n\times n},i,k=0,1,\cdots,n-1.$$

当 $(\alpha,\beta)=\left(\frac{1}{2},0\right),\left(0,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 时存在快速 W 变换(FWT),上述三种变换分别为 DWT-Ⅱ,DWT-Ⅲ 和 DWT-Ⅳ,而变换矩阵分别记为 $\hat{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{II}},\hat{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{III}},\hat{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{IV}}$,易证 $\hat{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}=\hat{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{III}}$ 且 $\hat{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{II}}=\boldsymbol{I}$。

设 $\boldsymbol{W}_{\mathrm{II}}=\hat{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{II}}\otimes\boldsymbol{I}_m,\boldsymbol{W}_{\mathrm{III}}=\hat{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{III}}\otimes\boldsymbol{I}_m$,矩阵序列 $\{\boldsymbol{A}_i\},i=0,1,\cdots,n-1,\boldsymbol{A}_i$ 为 m 阶实矩阵,则有下式成立:

$$\boldsymbol{W}_{\mathrm{III}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_0\\\boldsymbol{A}_1\\\vdots\\\boldsymbol{A}_{n-1}\end{pmatrix}=\sqrt{\frac{2}{n}}\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{A}_iw_{0,i}\\\sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{A}_iw_{1,i}\\\vdots\\\sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{A}_iw_{n-1,i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_0\\\boldsymbol{B}_1\\\vdots\\\boldsymbol{B}_{n-1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.\tag{6}$$

其中 $w_{k,i}=\sin\left[\frac{\pi}{4}+\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi i}{n}\right]$。由 DWT-Ⅲ 定义易知,式(6)中的 $\boldsymbol{B}$ 可以通过 m^2 个 n 维向量的 DWT-Ⅲ 变换得到。定义序列 $\{\boldsymbol{A}_k(i,l)\},k=0,1,\cdots,n-1$,其中 $\boldsymbol{A}_k(i,l)$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}_k$ 的第 i 行第 l 列位置上的元素,当固定 i 和 l 时,利用 DWT-Ⅲ 即可得到序列 $\{\boldsymbol{B}_k(i,l)\},k=0,1,\cdots,n-1$,称由 m^2 个 n 维向量 DWT-Ⅲ 得到 $\boldsymbol{B}$ 的过程为广义 DWT-Ⅲ,记为 GDWT-Ⅲ。

引理 1[7] 设 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{III}}$ 与 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{III}}$ 为 $\boldsymbol{W}_{\mathrm{III}}$ 的余弦与正弦部分,即 $\boldsymbol{W}_{\mathrm{III}}=\boldsymbol{S}_{\mathrm{III}}+\boldsymbol{C}_{\mathrm{III}},\boldsymbol{J}_i(i=1,2,3)$ 由式(1)给出,则

$$\boldsymbol{J}_1=\boldsymbol{J}_2\boldsymbol{J}_3,\ \boldsymbol{J}_1\boldsymbol{W}_{\mathrm{III}}=\boldsymbol{W}_{\mathrm{III}}\boldsymbol{J}_2,$$
$$\boldsymbol{J}_3\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{C}_3=\boldsymbol{BC}_{-1}(-\boldsymbol{C}_2(1),\cdots,-\boldsymbol{C}_2(n-1),\boldsymbol{C}_2(0))=\boldsymbol{BC}_{-1}(\boldsymbol{C}_3(0),\cdots,\boldsymbol{C}_3(n-1)).\tag{7}$$

证明 直接计算可知

$$\boldsymbol{J}_1=\boldsymbol{J}_2\boldsymbol{J}_3,\boldsymbol{J}_2^2=\boldsymbol{I},\boldsymbol{C}_{\mathrm{III}}\boldsymbol{J}_2=\boldsymbol{C}_{\mathrm{III}},\boldsymbol{S}_{\mathrm{III}}\boldsymbol{J}_2=-\boldsymbol{S}_{\mathrm{III}},\tag{8}$$

利用式(8)易证 $\boldsymbol{J}_1\boldsymbol{W}_{\mathrm{III}}=\boldsymbol{W}_{\mathrm{III}}\boldsymbol{J}_2$。应用块斜循环矩阵的性质,即有式(7)的第 3 个等式成立。

引理 2[7] 设 n 阶斜循环矩阵 $\boldsymbol{A}=Cir_{-1}(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_{n-1})$ 的特征值 $\lambda_k(0\leqslant k\leqslant n-1)$ 满足 $\lambda_k=\mathrm{Re}\lambda_k+\mathrm{j}\mathrm{Im}\lambda_k,\mathrm{j}=\sqrt{-1},\mathrm{Re}\boldsymbol{D}_A=\mathrm{diag}(\mathrm{Re}\lambda_0,\mathrm{Re}\lambda_1,\cdots,\mathrm{Re}\lambda_{n-1}),\mathrm{Im}\boldsymbol{D}_A=\mathrm{diag}(\mathrm{Im}\lambda_0,\mathrm{Im}\lambda_1,\cdots,\mathrm{Im}\lambda_{n-1})$,置换矩阵 $\hat{\boldsymbol{J}}_1$ 由式(1)给出,则

$$\hat{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{W}}_{\mathrm{II}}=\mathrm{Re}\boldsymbol{D}_A+\hat{\boldsymbol{J}}_1\mathrm{Im}\boldsymbol{D}_A.\tag{9}$$

由引理 1 易知定理 1 成立。

定理 1 设 mn 阶块斜循环矩阵 $\boldsymbol{C}_q(q=1,3)$ 与引理 1 中相同,$\boldsymbol{J}_1$ 由式(1)式给出,n 阶斜循环矩阵 $\boldsymbol{A}_{i,k}^q=\mathrm{Cir}_{-1}(C_q(0)(i,k),C_q(1)(i,k),\cdots,C_q(n-1)(i,k))$ 的特征值 $\lambda_p^{q,i,k}(0\leqslant p\leqslant n-1)$ 满足 $\lambda_p^{q,i,k}=\mathrm{Re}\lambda_p^{q,i,k}+\mathrm{j}\mathrm{Im}\lambda_p^{q,i,k}$,则

$$\boldsymbol{W}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_q\boldsymbol{W}_{\mathrm{II}}=\mathrm{Re}\boldsymbol{D}^q+J_1\mathrm{Im}\boldsymbol{D}^q,q=1,3.\tag{10}$$

其中

$$\mathrm{Re}\boldsymbol{D}_p^q=(d_{i,k})_{m\times m}=(\mathrm{Re}\lambda_p^{q,i,k})_{m\times m},$$

$\mathrm{Im}\boldsymbol{D}_p^q = (d_{i,k})_{m\times m} = (\mathrm{Im}\lambda_p^{q,i,k})_{m\times m}$,

$\mathrm{Re}\boldsymbol{D}^q = \mathrm{diag}(\mathrm{Re}\boldsymbol{D}_0^q, \mathrm{Re}\boldsymbol{D}_1^q, \cdots, \mathrm{Re}\boldsymbol{D}_{n-1}^q)$,

$\mathrm{Im}\boldsymbol{D}^q = \mathrm{diag}(\mathrm{Im}\boldsymbol{D}_0^q, \mathrm{Im}\boldsymbol{D}_1^q, \cdots, \mathrm{Im}\boldsymbol{D}_{n-1}^q)$,

$i,k = 0,1,\cdots,m-1;\ q = 1,3;\ p = 0,1,\cdots,n-1.$

式中,$C_q(0)(i,k)$ 为矩阵 $\boldsymbol{C}_q(0)$ 的(i,k) 位置上的元素。

由于$\boldsymbol{W}_{\mathrm{II}} = \boldsymbol{W}_{\mathrm{III}}^{\mathrm{T}}$,根据引理1,线性方程组(3) 等价表示为

$$(\boldsymbol{W}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{W}_{\mathrm{II}} + \boldsymbol{J}_1\boldsymbol{W}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_3\boldsymbol{W}_{\mathrm{II}})\boldsymbol{W}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{W}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}. \tag{11}$$

根据定理 1 与 $\boldsymbol{J}_1^2 = \boldsymbol{I}$,有

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{W}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{W}_{\mathrm{II}} + \boldsymbol{J}_1\boldsymbol{W}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_3\boldsymbol{W}_{\mathrm{II}} = \mathrm{Re}\boldsymbol{D}^1 + \mathrm{Im}\boldsymbol{D}^3 + \boldsymbol{J}_1(\mathrm{Re}\boldsymbol{D}^3 + \mathrm{Im}\boldsymbol{D}^1). \tag{12}$$

下面讨论 $\mathrm{Re}(\boldsymbol{D}^i)$ 和 $\mathrm{Im}(\boldsymbol{D}^i)(i = 1,3)$ 的求法。

引理 3[8] 设 $\eta_{i,k} = \cos\left(\frac{(2k+1)i\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{(2k+1)i\pi}{n}\right)\mathrm{j}$, $i,k = 0,1,\cdots,n-1$, n 阶斜循环矩阵$\boldsymbol{A} = \mathrm{Cir}_{-1}(\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_{n-1})$,则矩阵$\boldsymbol{A}$ 的n个特征值为

$$\lambda_k = \sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{A}_i\eta_{i,k},\quad k = 0,1,\cdots,n-1.$$

定理 2 设矩阵序列$\{\boldsymbol{C}_i(k)(1,:)\}$, $k = 0,1,\cdots,n-1$, $i = 1,3$(其中$\boldsymbol{C}_i(k)(1,:)$ 表示矩阵$\boldsymbol{C}_i(k)$ 的第一行) 的 GDWT-Ⅲ 为$\{\hat{\boldsymbol{Q}}_i(k)\}$, $k = 0,1,\cdots,n-1$, $i = 1,3$,令

$\boldsymbol{Q}_i(k) = \mathrm{Cir}(\hat{Q}_i(k)(1,0), \hat{Q}_i(k)(1,1), \cdots, \hat{Q}_i(k)(1,m-1))$,

$$\boldsymbol{N}_i(k) = \frac{\sqrt{n}}{2}(\boldsymbol{Q}_i(k) + \boldsymbol{Q}_i(n-k-1)), \tag{13}$$

$$\boldsymbol{M}_i(k) = \frac{\sqrt{n}}{2}(\boldsymbol{Q}_i(k) - \boldsymbol{Q}_i(n-k-1)),$$

$i = 1,3,\ k = 0,1,\cdots,n-1$,

则

$$\mathrm{Re}(\boldsymbol{D}^i) = \mathrm{diag}\{\boldsymbol{N}_i(0), \boldsymbol{N}_i(1), \cdots, \boldsymbol{N}_i(n-1)\},$$
$$\mathrm{Im}(\boldsymbol{D}^i) = \mathrm{diag}\{\boldsymbol{M}_i(0), \boldsymbol{M}_i(1), \cdots, \boldsymbol{M}_i(n-1)\},$$
$$i = 1,3. \tag{14}$$

证明 由 GDWT-Ⅲ 的定义得

$$\hat{\boldsymbol{Q}}_i(k) = \sqrt{\frac{2}{n}}\sum_{l=0}^{n-1}C_i(l)(1,:)w_{k,l},$$
$$w_{k,l} = \sin\left[\frac{\pi}{4} + \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi l}{n}\right],$$
$$k,l = 0,1,\cdots,n-1,\ i = 1,3. \tag{15}$$

直接计算可知

$$w_{k,l} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\frac{(2k+1)\pi l}{n} + \cos\frac{(2k+1)\pi l}{n}\right],$$

$k,l = 0,1,\cdots,n-1.$

由于式(15) 中的$\boldsymbol{C}_i(l)(i = 1,3,\ l = 0,1,\cdots n-1)$ 为循环矩阵,进而由引理 3 及三角关系式,即有式(14) 成立。

由式(11) ~ (14) 知,线性方程组(3) 可用如下 NFWT 算法进行求解。

① 根据 GDWT-Ⅲ 的定义,计算实矩阵序列$\{\boldsymbol{C}_1(i)(1,:)\}$, $\{\boldsymbol{C}_3(i)(1,:)\}(i = 0,1,\cdots,n-1)$ 的GDWT-Ⅲ,并分别记为$\{\hat{\boldsymbol{Q}}_1(i)\}$, $\{\hat{\boldsymbol{Q}}_3(i)\}$,计算$\hat{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{W}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$。

② 计算

$\boldsymbol{Q}_k(i) = \mathrm{Cir}(\hat{Q}_k(i)(1,0), \hat{Q}_k(i)(1,1), \cdots, \hat{Q}_k(i)(1,m-1))$,

$$\mathrm{Re}\boldsymbol{D}_i^k = \frac{\sqrt{n}}{2}(\boldsymbol{Q}_k(i) + \boldsymbol{Q}_k(n-i-1)),$$

$$\mathrm{Im}\boldsymbol{D}_i^k = \frac{\sqrt{n}}{2}(\boldsymbol{Q}_k(i) - \boldsymbol{Q}_k(n-i-1)),$$

$i = 0,1,\cdots,n-1,\ k = 1,3.$

③ 根据式(12) 和式(14) 构造交叉块对角矩阵$\boldsymbol{E}$,求解方程组 $\boldsymbol{E}\boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{b}}$。

④ 计算向量$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{W}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{y}$,得到的向量$\boldsymbol{x}$ 即为方程组(3) 的解。

注意到$\boldsymbol{Q}_k(i)(k = 1,3,\ i = 0,1,\cdots,n-1)$ 为循环矩阵,结合文献[1] 中的方法,可以进一步减少运算量,下面讨论算法中 ③ 的求解过程。

由定理 2 及式(12) 知,算法中第 ③ 步$\boldsymbol{E}\boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{b}}$,可以通过求解 l(当 n 为偶数时,$l = \frac{n}{2}$,当 n 为奇数时,$l = \frac{n-1}{2}$) 个实系数 $2m$ 阶线性方程组和 k(当 n 为偶数时,$k = 0$,当 n 为奇数时,$k = 1$) 个实系数 m 阶线性方程组得到。

考虑 $2m$ 线性方程组的求解,令

$$\boldsymbol{A}_i = \begin{pmatrix}\boldsymbol{N}_i & \boldsymbol{M}_{n-i-1}\\ \boldsymbol{M}_i & \boldsymbol{N}_{n-i-1}\end{pmatrix},\ \hat{\boldsymbol{A}}_i = \begin{pmatrix}\boldsymbol{H} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{H}\end{pmatrix}\boldsymbol{A}_i\begin{pmatrix}\boldsymbol{H} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{H}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{z}_i = \begin{pmatrix}\boldsymbol{H} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{H}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}\begin{pmatrix} im \\ \vdots \\ (i+1)m-1 \\ (n-i-1)m \\ \vdots \\ (n-i)m-1\end{pmatrix},$$

$$\hat{C}_i = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \hat{b} \begin{pmatrix} im \\ \vdots \\ (i+1)m-1 \\ (n-i-1)m \\ \vdots \\ (n-i)m-1 \end{pmatrix}, \quad i = 0,1,\cdots,l-1.$$

由定理 2 知，$M_i(N_i, i = 0,1,\cdots,n-1)$ 均为循环矩阵，用文献[2] 中的方法，可知

$$\hat{A}_i z_i = \hat{C}_i. \tag{16}$$

其中

$$\hat{A}_i = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}N_i + J_2^+ \mathrm{Im}N_i & \mathrm{Re}M_{n-i-1} + J_2^+ \mathrm{Im}M_{n-i-1} \\ \mathrm{Re}M_i + J_2^+ ImM_i & \mathrm{Re}N_{n-i-1} + J_2^+ \mathrm{Im}N_{n-i-1} \end{pmatrix},$$

由式(16) 可知，$2m$ 阶的线性方程组可以通过求解一些 4 阶的线性方程组得到。类似地可以讨论 m 阶线性方程的求解。

2 运算量分析与比较

容易看出，算法 NFWT 的主要运算量为 $3m$ 个 n 维向量的 DWT-Ⅲ（步骤①中的运算）、$4n$ 个 m 维向量的 FHT 和 $\frac{mn}{4}$ 个 4 阶实线性方程组的求解（步骤③中的运算）及 m 个 n 向量的 DWT-Ⅱ（步骤④中的运算），而 n 维向量的实 DWT-Ⅲ、DWT-Ⅱ 和 FHT 算法的运算量几乎相同，约为

$$\text{实乘}: \frac{n}{2}\log_2 n + O(n), \ \text{实加}: \frac{3n}{2}\log_2 n + o(n)。$$

因此，算法的主要运算量为 $O(mn\log_2(mn))$。与 FFT 算法相比，本文算法在一定程度上避免了复运算，从而减少了运算量。特别的，当 $m = 1$ 时（式(3) 为文献[4] 中所讨论方程组的类型），本文算法所需运算量仅为文献[4] 中算法的 $\frac{1}{5}$，可见本文算法是相当有效的。

为了进行比较，首先将文献[2]，[4] 中提到的算法推广到块斜循环矩阵预条件方程组。对文献[1] 中的算法进行推广可得到算法 BFWT，对文献[3] 中的两种共轭梯度法进行推广，则有算法 PCG—TA-KANG KU 和 MCG—TA-KANG KU。

2.1 算　法

2.1.1 BFWT 算法

(1) 计算 $D_1 = C_1^{\mathrm{T}}C_1, D_2 = C_2^{\mathrm{T}}C_2, C = D_1 - D_2$;

(2) 利用 W 变换计算：$b_1 = C_1^{\mathrm{T}}b, b_2 = C_2^{\mathrm{T}}J_1 b$ 以及向量差 $b_3 = b_1 - b_2$;

(3) 求解斜循环方程组：$Cx = b_3$。

若设 A 和 ΔA 为下面形式的块斜循环矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & \cdots & A_{n-1} \\ -A_{n-1} & A_0 & A_1 & \cdots & \vdots \\ -A_{n-2} & -A_{n-1} & A_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & A_1 \\ -A_1 & \cdots & -A_{n-2} & -A_{n-1} & A_0 \end{pmatrix},$$

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & -A_1 & \cdots & \cdots & -A_{n-1} \\ A_{n-1} & 0 & -A_1 & \cdots & \vdots \\ A_{n-2} & A_{n-1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -A_1 \\ A_1 & \cdots & A_{n-2} & A_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

令 $K_A = A + \Delta A$，根据文献[4]，可得块矩阵 $C = C_1 + J_1 C_2$ 的预优矩阵为

$$P = K_{C_1} + JK_{C_2}.$$

2.1.2 PCG—TA-KANG KU 算法

$$P^{-1}Cx = P^{-1}b.$$

2.1.3 MCG—TA-KANG KU 算法

$$(P^{-1}CP^{-1})Px = P^{-1}b.$$

2.2 数值算例

例 1　求解 mn 阶块斜循环矩阵预条件方程组

$$(C_1 + J_1 C_2)x = b(m = 1, n = 900),$$

其中

$$C_i = BC_{-1}(C_i(1), C_i(2), \cdots, C_i(n)), i = 1,2,$$

$$C_1(l) = \frac{1}{2(n-l)+6}, C_2(l) = \frac{1}{2l+2},$$

$l = 1,2,\cdots,n.$

为了保证有解，令 $b = (C_1 + J_1C_2)y, y(i) = i$，$i = 1,\cdots,mn$。因为 $\mathrm{rank}(C_1 + J_1C_2) = 900$，所以方程组只有一个解，记数值解为 $\hat{x}$，计算结果见表 1。

表 1　用不同算法计算例 1 中矩阵的误差和所需时间

方法	误差 $\lVert b - A\hat{x}\rVert_2 / \lVert b \rVert$	所需机时 t/s
NFWT	0	0.6120
BFWT	0	0.8220
MCG	3.1638×10^{-1}	2.4440
PCG	2.8849×10^{-4}	3.3650

注：PCG、MCG 为两种预优的共轭梯度法，预优矩阵 P 由文献[4] 得出。

需要指出的是，$\kappa_2(C_1 + J_1C_2) = 85.222$，若用文献[4] 中 TA-KANG KU 给出的预优矩阵 P，得到的矩阵 $P^{-1}(C_1 + J_1C_2)$ 的条件数为：$\kappa_2[P^{-1}(C_1 + J_1C_2)] = 85.169$，即预优后矩阵的条件数没有明显的改进，而本文算法则可以利用 4 个 n 维向量的 DWT-Ⅲ 运算量得到问题的精确解。

例 2　求解 mn 阶块斜循环矩阵预条件方程组

$$(\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{J}_1\boldsymbol{C}_2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\ (m=2^3,n=2^7),$$

其中 $\boldsymbol{C}_i=BC_{-1}(\boldsymbol{C}_i(1),\boldsymbol{C}_i(2),\cdots,\boldsymbol{C}_i(n)),i=1,2;\boldsymbol{C}_i(l)(i=1,2,l=1,2\cdots,n)$ 均为 m 阶循环矩阵，且有

$$\boldsymbol{C}_1(l)=\mathrm{Cir}(2(n-l+1)+m-1,2(n-l+1)+m-2,\cdots,2(n-l+1)),$$

$$\boldsymbol{C}_2(l)=\mathrm{Cir}(2(l-1)+m-1,2(l-1)+m-2,\cdots,2(l-1)),l=1,2,\cdots,n.$$

为了保证有解，令

$$\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{J}_1\boldsymbol{C}_2)\boldsymbol{y},y(i)=i,i=1,\cdots,mn.$$

记数值解为 $\hat{x}$，因为 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{J}_1\boldsymbol{C}_2)=576$，即方程组有多个解，所以只考虑 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}$ 的相对误差即可，只要相对误差足够小，则可说明算法正确。计算结果见表 2。

表 2　用不同算法计算例 2 中矩阵的误差和所需时间

方法	误差 $\Vert\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}\Vert_2/\Vert\boldsymbol{b}\Vert$	所需机时 t/s
NFWT	8.0805×10^{-16}	1.1720
BFWT	6.7034×10^{-7}	1.6620
GAUSS	9.2964×10^{-13}	2.8640

3　结　论

(1) 利用 FHT 和 FWT 求解块斜循环矩阵预条件方程组，与 FFT 方法相比，避免了复运算，从而提高了效率。

(2) 新的快速算法是一种分解算法，它将原问题分解为一系列相互独立的子问题，子问题具有较小维数，这使得算法具有更高的计算效率，且适用于并行计算，这对于大规模或超大规模矩阵的求解优点突出。

(3) 新算法是斜循环矩阵预条件方程组的一种推广，当 $m=1$ 时，便是斜循环矩阵预条件方程组。

参考文献：

[1]　李俊兰，梁华庆. 一种用于彩色图像认证的脆弱水印算法[J]. 石油大学学报：自然科学版，2004，28(3)：108-114.

LI Jun-lan, LIANG Hua-qing. A fragile water marking scheme for color image authentication[J]. Journal of the University of Petroleum, China (Edition of Natural Science), 2004, 28(3): 108-114.

[2]　成礼智，蒋增荣. 关于一种循环类预条件方程组的快速求解[J]. 高等学校计算数学学报，1999(2)：110-114.

CHENG Li-zhi, JIANG Zeng-rong. Fast solution for a circular-like precondition equations[J]. Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities, 1999(2): 110-114.

[3]　张耀明. 块循环矩阵方程组的新算法[J]. 高等学校计算数学学报，2001(3)：281-288.

ZHANG Yao-ming. A new algorithm solving the linear equation system with block cycle coefficient matrix[J]. Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2001(3): 281-288.

[4]　KU T K, KUO C C. Preconditioned iterative methods for solving Toeplitz-plus-Hankel systems[J]. SIAM J Numer Anal, 1993, 30: 824-845.

[5]　蒋增荣，曾泳泓，余品能. 快速算法[M]. 长沙：国防科技大学出版社，1993：34-78.

[6]　曾泳泓. 离散卷积的 W 变换算法[J]. 计算数学，1995，17(1)：37-46.

ZENG Yong-hong. Computing discrete convolutions by W transform[J]. Mathematica Numerica Sinica, 1995, 17(1): 37-46.

[7]　成礼智. 对称 Toeplitz 系统的快速 W 变换基预条件[J]. 计算数学，2000，22(1)：73-82.

CHENG Li-zhi. Fast W transform based preconditioner for symmetric toeplitz systems[J]. Mathematica Numerica Sinica, 2000, 22(1): 73-82.

[8]　江兆林，周章鑫. 循环矩阵[M]. 成都：成都科技大学出版社，1999：10-56.

(编辑　修荣荣)