文章编号:1673-5005(2007)04-0038-08

层状介质中三维物体重构的对比源反演算法

魏宝君[1,2], LIU Q H[2]

(1. 中国石油大学 物理科学与技术学院,山东 东营 257061;
2. Department of Electrical & Computer Engineering, Duke University, Durham, NC 27708, USA)

摘要:对比源反演(CSI)算法将反演问题转化为求解成本泛函的极小值问题,从而形成重构对比源和对比度的迭代序列。开发了一种三维 CSI 算法对层状介质中的三维物体进行重构,该算法是对二维对比源反演算法的推广。该算法无须正演计算,亦无须人为地选择正则化参数,反演过程更稳定。CSI 的每一次迭代过程均采用快速 Fourier 变换技术计算并矢 Green 函数算子及其共轭算子,确保了该算法在三维层状介质情况下的高效率。复杂模型的反演结果说明,CSI 算法对重构层状介质中的任意三维异常体是非常有效的。

关键词:对比源反演(CSI)算法;层状介质;三维物体重构;并矢 Green 函数;快速 Fourier 变换

中图分类号:O 441.4 **文献标识码**:A

Contrast source inversion algorithm for reconstructing 3-D objects in stratified medium

WEI Bao-jun[1,2], LIU Q H[2]

(1. *College of Physics Science and Technology in China University of Petroleum, Dongying* 257061, *Shandong Province, China*;
2. *Department of Electrical & Computer Engineering, Duke University, Durham, NC* 27708, *USA*)

Abstract: Contrast source inversion (CSI) algorithm recasts the inversion problem as a minimization of a cost functional, thus an iterative sequence is formed to reconstruct the contrast sources and contrasts. A 3-D CSI algorithm was developed to reconstruct 3-D objects in stratified medium. It is an extension of 2-D CSI algorithm. As there is no need for the forward solver and a manual selection of regularization parameter in the algorithm, the inversion process is more stable. The fast Fourier transform technology is adopted to calculate the dyadic Green's operator and its adjoint operator during each iteration of CSI, which ensures the high efficiency of the algorithm in stratified medium. The inversion results for some complicated models obtained from the CSI algorithm show that the algorithm is very efficient in reconstructing arbitrary 3-D inhomogeneous objects in a stratified medium.

Key words: contrast source inversion (CSI) algorithm; stratified medium; reconstruction of 3-D objects; dyadic Green's function; fast Fourier transform

三维电磁波逆散射技术在地球物理探测、生物医学成像、环境监测、军事探雷等领域具有重要用途,但由于背景介质复杂、未知量大以及反演过程病态等问题,该项研究一直是一个极具挑战性的课题。传统的三维电磁波逆散射技术一般包含两部分:一部分是正演数值模拟,即计算给定模型的电磁场分布;另一部分是逆过程,即根据给定的测量场重构电参数的分布。在所有计算电磁散射正演问题的方法中,体积分方程被认为是一种非常有效的方法,并且常与反演方法结合求解三维电磁逆散射问题。一种有效的求解体积分方程的方法是将稳定型双共轭梯度(bi-CGSTAB)迭代算法与快速 Fourier 变换(FFT)技术相结合产生的 BCGS-FFT 算法[1-3]。反演方法一般采用 Born 迭代方法(BIM: Born iterative meth-

收稿日期:2006-12-17
基金项目:美国国家科学基金(CCR-0219528)和中国石油大学博士科研基金(Y031807)
作者简介:魏宝君(1969-),男(汉族),山东临沂人,副教授,博士,主要从事地球物理电磁场理论方法的研究。

万方数据

od）和变型 Born 迭代方法（DBIM：distorted Born iterative method）[4-6]。BIM 和 DBIM 算法的每一次迭代均需进行正演数值模拟计算，亦需人为地选择正则化参数，反演过程有时不稳定。为此，笔者将求解均匀背景介质中二维电磁波逆散射问题的对比源反演（CSI）算法[7-8]进行推广，应用于层状介质中三维电磁波逆散射问题的求解。

1　体积分方程及其离散形式

假设包含异常体的成像区域 D 位于层状介质的第 q 层内，第 q 层和异常体的复电容率分别为 $\tilde{\varepsilon}_q$ 和 $\tilde{\varepsilon}$，它们均为相对介电系数和电导率的组合。例如，一个异常体的复电容率可表示为 $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0\varepsilon_r - \mathrm{i}\dfrac{\sigma}{\omega}$，其中 ε_r 为物体的相对介电系数，ε_0 为真空的电容率，σ 为物体的电导率，ω 为角频率。假设有 N_T 个入射场 $\boldsymbol{E}_j^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r})\,(j = 1,2,\cdots,N_T)$ 依次辐射到异常体上，并假设对应于每一个入射场的总场为 $\boldsymbol{E}_j(\boldsymbol{r})$，则层状介质第 m 层内某个表面 S 上的散射场可表示为如下积分方程形式：

$$\boldsymbol{E}_j^{\mathrm{sca}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_j(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}_j^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{G}_S \cdot \boldsymbol{w}_j,\ \boldsymbol{r} \in S. \quad (1)$$

其中

$$\boldsymbol{G}_S \cdot \boldsymbol{w}_j = \mathrm{i}\omega\tilde{\varepsilon}_q\int_D \boldsymbol{G}_{mq}^{\mathrm{EJ}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{w}_j(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}', \quad (2)$$

$$\boldsymbol{w}_j(\boldsymbol{r}) = \chi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_j(\boldsymbol{r}),\ \chi(\boldsymbol{r}) = \frac{\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r})}{\tilde{\varepsilon}_q} - 1.$$

式中，$\boldsymbol{w}_j(\boldsymbol{r})$ 为对比源；$\chi(\boldsymbol{r})$ 为对比度；$\boldsymbol{G}_{mq}^{\mathrm{EJ}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 为 q 层中 $\boldsymbol{r}'$ 处的单位电流元在 m 层中观测点 $\boldsymbol{r}$ 处的电型并矢 Green 函数。

确定区域 D 内对比源分布的积分方程可表示为

$$\boldsymbol{w}_j = \chi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_j^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}) + \chi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{G}_D \cdot \boldsymbol{w}_j,\ \boldsymbol{r} \in D. \quad (3)$$

其中

$$\boldsymbol{G}_D \cdot \boldsymbol{w}_j = (\kappa_q^2 + \nabla\nabla\cdot)\boldsymbol{A}_j(\boldsymbol{r}), \quad (4)$$

$$\boldsymbol{A}_j(\boldsymbol{r}) = \int_D \boldsymbol{G}_{qq}^{\mathrm{AJ}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{w}_j(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}', \quad (5)$$

$$\kappa_q^2 = \omega^2\mu_q\tilde{\varepsilon}_q.$$

式中，$\boldsymbol{G}_{qq}^{\mathrm{AJ}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 为磁矢势并矢 Green 函数，它表示当观测点 $\boldsymbol{r}$ 和源点 $\boldsymbol{r}'$ 均在第 q 层时单位电流元产生的磁矢势；κ_q 为第 q 层中的波数；μ_q 为第 q 层的磁导率。式（1）称为数据方程，由该式可计算观测点的散射电场。式（3）称为目标方程，是计算异常体内总场分布的第二类 Fredholm 积分方程。为避免奇异性，计算 $\boldsymbol{A}_j(\boldsymbol{r})$ 时采用了 $\boldsymbol{G}_{qq}^{\mathrm{AJ}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 而非 $\boldsymbol{G}_{qq}^{\mathrm{EJ}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$，并且对 $\boldsymbol{G}_{qq}^{\mathrm{AJ}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的直接项采用球平均（弱化）形式[9]。

对于并矢 Green 函数 $\boldsymbol{G}^{\mathrm{EJ}}$ 和 $\boldsymbol{G}^{\mathrm{AJ}}$，采用一种递推方法计算并矢 Green 函数中所有 Sommerfeld 积分的系数矩阵，该方法非常适合与体积分方程结合。在改进的方法中，根据层界面处的连续性条件得到 3 个系数矩阵方程组，分别对应于垂向单位电偶极子产生的 TM 波、水平方向单位电偶极子产生的 TE 波和 TM 波。这 3 个系数矩阵方程组可表示为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{V}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{V}} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{V}},\boldsymbol{A}^{\mathrm{TE}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{TE}} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{TE}},\boldsymbol{A}^{\mathrm{TM}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{TM}} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{TM}}. \quad (6)$$

式中，$\boldsymbol{A}^{V},\boldsymbol{A}^{\mathrm{TE}},\boldsymbol{A}^{\mathrm{TM}} \in \mathbf{C}^{2K\times 2K}$ 为系数矩阵；$\boldsymbol{X}^{\mathrm{V}},\boldsymbol{X}^{\mathrm{TE}},\boldsymbol{X}^{\mathrm{TM}} \in \mathbf{C}^{2K\times 1}$ 为待定系数；$\boldsymbol{S}^{\mathrm{V}},\boldsymbol{S}^{\mathrm{TE}},\boldsymbol{S}^{\mathrm{TM}} \in \mathbf{C}^{2K\times 1}$ 为源项；K 为层状介质的层数，此处层状介质的编号为 0，1，…，K。这些方程组可用递推方法求解。通过求解这些系数矩阵方程组可以得到 Sommerfeld 积分的所有待定系数，而并矢 Green 函数的每一个分量只不过是这几个 Sommerfeld 积分的某种组合。由于这些 Sommerfeld 积分只依赖于 ρ $\left(\rho = [(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2}\right)$，$z$ 和 z'，并不直接依赖于 x,x',y 或 y'，所以只需根据不同的 ρ,z 和 z' 预先计算和存储这些 Sommerfeld 积分，在计算并矢 Green 函数时只需将它们进行组合和插值即可，从而达到节约时间和内存的目的。在上述 3 个系数矩阵方程组中只需改变源项中元素的位置，就可以方便地计算出当源点和场点在任意层时的并矢 Green 函数。将新开发的并矢 Green 函数分别应用于数据方程和目标方程，就可以得到当发射源在任意层和任意方向、接收点在任意层时散射电场的所有分量。

采用脉冲基函数将式（2）和式（4）离散。设区域 D 的形状为立方体，其尺寸为 $L_x \times L_y \times L_z$。将 D 离散为 $M \times N \times P$ 个完全相同的立方体小单元，每个单元在 x,y,z 方向的尺寸分别为 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$，则其体积为 $\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z$，其中心点坐标为 $\boldsymbol{r}_{m,n,p} = (x_m,y_n,z_p)$。设在每一个小单元内 $\boldsymbol{w}_j$ 恒定，表示为 $\boldsymbol{w}_{j;m,n,p}$，则式（2）离散为

$$\boldsymbol{G}_S \cdot \boldsymbol{w}_j = \mathrm{i}\omega\tilde{\varepsilon}_q\Delta V\sum_{m',n',p'=1}^{M,N,P}\boldsymbol{G}_{mq}^{\mathrm{EJ}}(\boldsymbol{r};x'_m,y'_n,z'_p) \cdot \boldsymbol{w}_{j;m',n',p'},\ \boldsymbol{r} \in S. \quad (7)$$

选择磁矢势并矢 Green 函数 $\boldsymbol{G}_{qq}^{\mathrm{AJ}}$ 为如下形式[10]：

$$\boldsymbol{G}_{qq}^{\mathrm{AJ}} = \begin{pmatrix} G_{xx}^{\mathrm{AJ}} & 0 & 0 \\ 0 & G_{yy}^{\mathrm{AJ}} & 0 \\ G_{zx}^{\mathrm{AJ}} & G_{zy}^{\mathrm{AJ}} & G_{zz}^{\mathrm{AJ}} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

并且有 $G_{xx}^{\mathrm{AJ}} = G_{yy}^{\mathrm{AJ}}$。计算发现，当观测点 $\boldsymbol{r}$ 和源点 $\boldsymbol{r}'$ 均在第 q 层内时，$\boldsymbol{G}_{qq}^{\mathrm{AJ}}$ 可以表示为两项之和，即 $\boldsymbol{G}_{qq}^{\mathrm{AJ}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{G}_{qq}^{\mathrm{AJ}(-)}(x-x',y-y',z-z') + \boldsymbol{G}_{qq}^{\mathrm{AJ}(+)}(x-x',$

万方数据

$y-y',z+z'$),且 $\boldsymbol{G}_{qq}^{\mathrm{AJ}(-)}$ 和 $\boldsymbol{G}_{qq}^{\mathrm{AJ}(+)}$ 的 4 个非零分量可分别由 3 个独立的 Sommerfeld 积分组合得到。利用 $\boldsymbol{G}_{qq}^{\mathrm{AJ}}$ 的这一特点,式(5) 的分量式可离散为

$$\begin{cases} A_{j;m,n,p}^{(x)} = \Delta V \sum\limits_{m',n',p'} G_{xx}^{\mathrm{AJ}(-)}(x_m - x_{m'}, y_n - y_{n'}, z_p - z_{p'}) w_{j;m',n',p'}^{(x)} + \Delta V \sum\limits_{m',n',p'} G_{xx}^{\mathrm{AJ}(+)}(x_m - x_{m'}, y_n - y_{n'}, z_p + z_{p'}) w_{j;m',n',p'}^{(x)}, \\ A_{j;m,n,p}^{(y)} = \Delta V \sum\limits_{m',n',p'} G_{xx}^{\mathrm{AJ}(-)}(x_m - x_{m'}, y_n - y_{n'}, z_p - z_{p'}) w_{j;m',n',p'}^{(y)} + \Delta V \sum\limits_{m',n',p'} G_{xx}^{\mathrm{AJ}(+)}(x_m - x_{m'}, y_n - y_{n'}, z_p + z_{p'}) w_{j;m',n',p'}^{(y)}, \\ A_{j;m,n,p}^{(z)} = \Delta V \sum\limits_{m',n',p'} G_{zx}^{\mathrm{AJ}(-)}(x_m - x_{m'}, y_n - y_{n'}, z_p - z_{p'}) w_{j;m',n',p'}^{(x)} + \Delta V \sum\limits_{m',n',p'} G_{zx}^{\mathrm{AJ}(+)}(x_m - x_{m'}, y_n - y_{n'}, z_p + z_{p'}) w_{j;m',n',p'}^{(x)} + \\ \Delta V \sum\limits_{m',n',p'} G_{zy}^{\mathrm{AJ}(-)}(x_m - x_{m'}, y_n - y_{n'}, z_p - z_{p'}) w_{j;m',n',p'}^{(y)} + \Delta V \sum\limits_{m',n',p'} G_{zy}^{\mathrm{AJ}(+)}(x_m - x_{m'}, y_n - y_{n'}, z_p + z_{p'}) w_{j;m',n',p'}^{(y)} + \\ \Delta V \sum\limits_{m',n',p'} G_{zz}^{\mathrm{AJ}(-)}(x_m - x_{m'}, y_n - y_{n'}, z_p - z_{p'}) w_{j;m',n',p'}^{(z)} + \Delta V \sum\limits_{m',n',p'} G_{zz}^{\mathrm{AJ}(+)}(x_m - x_{m'}, y_n - y_{n'}, z_p + z_{p'}) w_{j;m',n',p'}^{(z)}. \end{cases} \tag{9}$$

式(9) 中并矢 Green 函数 $\boldsymbol{G}_{qq}^{\mathrm{AJ}(-)}$ 和 $\boldsymbol{G}_{qq}^{\mathrm{AJ}(+)}$ 与对比源 $\boldsymbol{w}_j$ 之间的乘积在 x,y 方向均可表示为褶积形式,在 z 方向可分别表示为褶积与相关形式,它们均可以采用快速 Fourier 变换(FFT) 技术实现。这样,计算速度可大大加快,将 CPU 时间减少到 $O[(MNP)\log_2(MNP)]$,将内存量减少到 $O[(MNP)]$。

令 $\boldsymbol{D}_j(\boldsymbol{r}) = \nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}_j(\boldsymbol{r})$,式(4) 中 $\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}_j(\boldsymbol{r})$ 各分量的离散形式为

$$\begin{cases} D_{j;m,n,p}^{(x)} = \dfrac{1}{(\Delta x)^2}(A_{j;m+1,n,p}^{(x)} - 2A_{j;m,n,p}^{(x)} + A_{j;m-1,n,p}^{(x)}) + \dfrac{1}{4\Delta x\Delta y}(A_{j;m+1,n+1,p}^{(y)} - A_{j;m-1,n+1,p}^{(y)} - A_{j;m+1,n-1,p}^{(y)} + \\ A_{j;m-1,n-1,p}^{(y)}) + \dfrac{1}{4\Delta x\Delta z}(A_{j;m+1,n,p+1}^{(z)} - A_{j;m-1,n,p+1}^{(z)} - A_{j;m+1,n,p-1}^{(z)} + A_{j;m-1,n,p-1}^{(z)}), \\ D_{j;m,n,p}^{(y)} = \dfrac{1}{(\Delta y)^2}(A_{j;m,n+1,p}^{(y)} - 2A_{j;m,n,p}^{(y)} + A_{j;m,n-1,p}^{(y)}) + \dfrac{1}{4\Delta x\Delta y}(A_{j;m+1,n+1,p}^{(x)} - A_{j;m-1,n+1,p}^{(x)} - A_{j;m+1,n-1,p}^{(x)} + \\ A_{j;m-1,n-1,p}^{(x)}) + \dfrac{1}{4\Delta y\Delta z}(A_{j;m,n+1,p+1}^{(z)} - A_{j;m,n-1,p+1}^{(z)} - A_{j;m,n+1,p-1}^{(z)} + A_{j;m,n-1,p-1}^{(z)}), \\ D_{j;m,n,p}^{(z)} = \dfrac{1}{(\Delta z)^2}(A_{j;m,n,p+1}^{(z)} - 2A_{j;m,n,p}^{(z)} + A_{j;m,n,p-1}^{(z)}) + \dfrac{1}{4\Delta x\Delta z}(A_{j;m+1,n,p+1}^{(x)} - A_{j;m-1,n,p+1}^{(x)} - A_{j;m+1,n,p-1}^{(x)} + \\ A_{j;m-1,n,p-1}^{(x)}) + \dfrac{1}{4\Delta y\Delta z}(A_{j;m,n+1,p+1}^{(y)} - A_{j;m,n-1,p+1}^{(y)} - A_{j;m,n+1,p-1}^{(y)} + A_{j;m,n-1,p-1}^{(y)}). \end{cases} \tag{10}$$

正演计算的目的就是求解式(3) 得到区域 D 内总电场的分布,而一旦获得 D 内的总电场,就可以由式(1) 计算出 S 面上任一点的散射电场。逆散射技术的目的就是根据 S 面上给定的散射场和 D 域内的入射场,获得 D 域内电参数对比度 χ 的分布。但由于 D 域内的总场是未知的,并且是电参数对比度 χ 的函数,故该反演过程一般是非线性的。又由于信息量数目的限制和测量误差的存在,该反演过程还是病态的,它的解一般是非惟一的。

2 对比源反演(CSI) 算法

CSI 算法将反演问题转化为求解下列成本泛函的极小值问题,该成本泛函是数据方程和目标方程的线性组合,即

$$F(\boldsymbol{w}_j,\chi) = \frac{\sum\limits_j \|\boldsymbol{f}_j - \boldsymbol{G}_{\mathrm{S}}\cdot\boldsymbol{w}_j\|_{\mathrm{S}}^2}{\sum\limits_j \|\boldsymbol{f}_j\|_{\mathrm{S}}^2} + \sum_j \|\chi\boldsymbol{E}_j^{\mathrm{inc}} - \boldsymbol{w}_j + \chi\boldsymbol{G}_{\mathrm{D}}\cdot\boldsymbol{w}_j\|_D^2 \Big/ \sum_j \|\chi\boldsymbol{E}_j^{\mathrm{inc}}\|_D^2. \tag{11}$$

式中 $\boldsymbol{f}_j$ 为 S 域上的测量数据即已知的散射场;$\|\cdot\|_{S,D}^2$ 表示 S 域或 D 域上的 L_2 范数。式(11) 右侧第一项度量数据方程的归一化误差,第二项度量目标方程的归一化误差,当 $\boldsymbol{w}_j = 0$ 时这两项均为 1。由于在式(11) 右侧附加了第二项即目标方程的约束,CSI 反演问题变为超定问题,解的非惟一性大大降低。式(11) 极小化的实现可以分为两个步骤分别对对比源 $\boldsymbol{w}_j$ 和电参数对比度 χ 进行更新,轮流依次迭代。根据文献[8] 提出的求解均匀背景介质中二维电磁波逆散射问题的 CSI 算法,得到三维 CSI 算法的迭代步骤。

2.1 对比源 $\boldsymbol{w}_j$ 的更新

定义第 k 次迭代的数据误差和目标误差分别为

$$\boldsymbol{\rho}_{j,k} = \boldsymbol{f}_j - \boldsymbol{G}_{\mathrm{S}}\cdot\boldsymbol{w}_{j,k}, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{r}_{j,k} = \chi_k\boldsymbol{E}_{j,k} - \boldsymbol{w}_{j,k}. \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{E}_{j,k}$ 的表达式可由式(3) 得到,即

$$\boldsymbol{E}_{j,k} = \boldsymbol{E}_j^{\mathrm{inc}} + \boldsymbol{G}_{\mathrm{D}}\cdot\boldsymbol{w}_{j,k}. \tag{14}$$

设已知 χ_{k-1} 和 $\boldsymbol{w}_{j,k-1}$,通过下式对 $\boldsymbol{w}_j$ 进行更新:

万方数据

$$\boldsymbol{w}_{j,k} = \boldsymbol{w}_{j,k-1} + \alpha_k^w \boldsymbol{v}_{j,k}. \tag{15}$$

其中

$$\alpha_k^w = \frac{-\mathrm{Re}\sum_j < \boldsymbol{g}_{j,k}^w, \boldsymbol{v}_{j,k} >_D}{\eta_S \sum_j \| \boldsymbol{G}_S \cdot \boldsymbol{v}_{j,k} \|_S^2 + \eta_{D,k-1} \sum_j \| \boldsymbol{v}_{j,k} - \chi_{k-1} \boldsymbol{G}_D \cdot \boldsymbol{v}_{j,k} \|_D^2}, \tag{16}$$

式中，α_k^w 为第 k 次迭代的迭代参数；$\boldsymbol{v}_{j,k}$ 为第 k 次迭代的更新方向。$\boldsymbol{v}_{j,k}$ 由下列迭代方式得到：

$$\boldsymbol{v}_{j,0} = 0, \boldsymbol{v}_{j,k} = \boldsymbol{g}_{j,k}^w + \gamma_k^w \boldsymbol{v}_{j,k-1}, \ k \geqslant 1, \tag{17}$$

其中

$$\boldsymbol{g}_{j,k}^w = -\eta_S \boldsymbol{G}_S^* \cdot \boldsymbol{\rho}_{j,k-1} - \eta_{D,k-1}[\boldsymbol{r}_{j,k-1} - \boldsymbol{G}_D^* \cdot (\bar{\chi}_{k-1} \boldsymbol{r}_{j,k-1})], \tag{18}$$

$$\gamma_k^w = \frac{\mathrm{Re}\sum_j < \boldsymbol{g}_{j,k}^w, \boldsymbol{g}_{j,k}^w - \boldsymbol{g}_{j,k-1}^w >_D}{\sum_j < \boldsymbol{g}_{j,k-1}^w, \boldsymbol{g}_{j,k-1}^w >_D}. \tag{19}$$

$$\eta_S = \left(\sum_j \| \boldsymbol{f}_j \|_S^2 \right)^{-1}, \ \eta_{D,k-1} = \left(\sum_j \| \chi_{k-1} \boldsymbol{E}_j^{\mathrm{inc}} \|_D^2 \right)^{-1}. \tag{20}$$

式中，η_S 和 $\eta_{D,k-1}$ 为归一化因子；$\boldsymbol{G}_S^*$ 和 $\boldsymbol{G}_D^*$ 分别为 $\boldsymbol{G}_S$ 和 $\boldsymbol{G}_D$ 的共轭算子。$\boldsymbol{G}_S^*$ 和 $\boldsymbol{G}_D^*$ 由下式给出：

$$\boldsymbol{G}_S^* \cdot \boldsymbol{\rho}_{j,k-1} = \overline{\mathrm{i}\omega\tilde{\varepsilon}_q} \int_S \overline{\boldsymbol{G}_{qm}^{\mathrm{EJ}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')} \cdot \boldsymbol{\rho}_{j,k-1}(\boldsymbol{r}') \mathrm{d}\boldsymbol{r}', \quad \boldsymbol{r} \in D, \boldsymbol{r}' \in S, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{G}_D^* \cdot (\chi_{k-1} \boldsymbol{r}_{j,k-1}) = (\overline{\kappa_q^2} + \nabla \nabla \cdot) \int_D \overline{\boldsymbol{G}_{qq}^{\mathrm{AJ}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')} \cdot (\chi_{k-1} \boldsymbol{r}_{j,k-1})(\boldsymbol{r}') \mathrm{d}\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r} \in D, \boldsymbol{r}' \in D. \tag{22}$$

式中，参数上方的横杠“—”表示该参数的共轭复数。

式(15) 中更新 $\boldsymbol{w}_j$ 所需的初始值为

$$\boldsymbol{w}_{j,0} = \frac{\| \boldsymbol{G}_S^* \cdot \boldsymbol{f}_j \|_D^2}{\| \boldsymbol{G}_S \cdot \boldsymbol{G}_S^* \cdot \boldsymbol{f}_j \|_S^2} \boldsymbol{G}_S^* \cdot \boldsymbol{f}_j. \tag{23}$$

上述各类积分的数值运算均采用脉冲基函数进行类似于式(2) 和式(4) 的离散。至此，除 χ_{k-1} 外更新 $\boldsymbol{w}_j$ 所需的物理量均已得到，可采用式(15) 对 $\boldsymbol{w}_j$ 进行迭代更新。

2.2　对比度 χ 的更新

设已知 χ_{k-1}，通过下式对 χ 进行更新：

$$\chi_k = \chi_{k-1} + \alpha_k^\chi d_k. \tag{24}$$

其中

$$\alpha_k^\chi = \frac{-(aC - Ac) + \sqrt{(aC - Ac)^2 - 4(aB - Ab)(bC - Bc)}}{2(aB - Ab)}, \tag{25}$$

$$a = \sum_j \| d_k \boldsymbol{E}_{j,k} \|_D^2, \quad A = \sum_j \| d_k \boldsymbol{E}_j^{\mathrm{inc}} \|_D^2,$$

$$b = \mathrm{Re}\sum_j < \chi_{k-1} \boldsymbol{E}_{j,k} - \boldsymbol{w}_{j,k}, d_k \boldsymbol{E}_{j,k} >_D,$$

$$B = \mathrm{Re}\sum_j < \chi_{k-1} \boldsymbol{E}_j^{\mathrm{inc}}, d_k \boldsymbol{E}_j^{\mathrm{inc}} >_D,$$

$$c = \sum_j \| \chi_{k-1} \boldsymbol{E}_{j,k} - \boldsymbol{w}_{j,k} \|_D^2, \ C = \sum_j \| \chi_{k-1} \boldsymbol{E}_j^{\mathrm{inc}} \|_D^2.$$

d_k 由下列迭代方式得到：

$$d_0 = 0, \quad d_k = g_k^\chi + \gamma_k^\chi d_{k-1}, \ k \geqslant 1, \tag{26}$$

其中

$$\begin{cases} g_k^\chi = -\eta_{D,k-1} \dfrac{\sum_j (\chi_{k-1} \boldsymbol{E}_{j,k} - \boldsymbol{w}_{j,k}) \overline{\boldsymbol{E}_{j,k}}}{\sum_j | \boldsymbol{E}_{j,k} |^2}, \\ \gamma_k^\chi = \dfrac{\mathrm{Re} < g_k^\chi, g_k^\chi - g_{k-1}^\chi >_D}{\sum_j < g_{k-1}^\chi, g_{k-1}^\chi >_D}. \end{cases} \tag{27}$$

式(27) 中的 $\boldsymbol{E}_{j,k}$ 由式(14) 得到。

电参数对比度 χ 的初始值为

$$\chi_0 = \frac{\sum_j \boldsymbol{w}_{j,0} \overline{\boldsymbol{E}_{j,0}}}{\sum_j | \boldsymbol{E}_{j,0} |^2}. \tag{28}$$

其中 $\boldsymbol{E}_{j,0}$ 由式(14) 令 $k = 0$ 得到。

具体迭代顺序为：由式(23) 和式(28) 计算得到初始值 $\boldsymbol{w}_{j,0}$ 和 χ_0；由式(12) 和式(13) 计算得到 $\boldsymbol{\rho}_{j,0}$ 和 $\boldsymbol{r}_{j,0}$；由式(15) 得到 $\boldsymbol{w}_{j1}$，注意在由式(17) 得到 $\boldsymbol{v}_{j,1}$ 时由于 $\boldsymbol{v}_{j,0} = 0$，故无须计算 γ_1^w，可令 $\gamma_1^w = 0$；由式(24) 得到 χ_1，注意在由式(26) 得到 d_1 时由于 $d_0 = 0$，故无须计算 γ_1^χ，可令 $\gamma_1^\chi = 0$；由 $\boldsymbol{w}_{j1}$ 和 χ_1 计算 $\boldsymbol{\rho}_{j,1}$ 和 $\boldsymbol{r}_{j,1}$ 并开始新一轮迭代，直到数据误差和目标误差小于给定的值为止。

由上述迭代步骤可以看出，与 BIM 和 DBIM[6] 相比，CSI 算法的每一次迭代无须正演计算，亦无须人为地选择正则化参数。实际计算发现，该算法反演过程更稳定。此处需指出的是，在以前开发的完全三维逆散射技术中，发射阵列和接收阵列均被限制在第一层[6,11-12]。此处根据并矢 Green 函数的改进型表达式，对这些反演技术的应用范围进行了扩展。在扩展改进后的三维逆散射技术中，发射阵列可在多层介质的任意层内并且可沿任意方向放置，接收阵列亦可在任意层内并且在反演中可采用任意分量。另外由式(9)，在计算并矢 Green 函数算子 $\boldsymbol{G}_D$ 及其共轭算子 $\boldsymbol{G}_D^*$ 时可采用快速 Fourier 变换(FFT) 技术，从而使 CPU 时间和内存量大大减少。

3　反演实例

反演原理图见图 1。首先用一个 5 层介质的反演模型验证所开发的 CSI 算法的正确性和可行性，然后用一个 3 层介质反演模型分析物体不同尺寸对成

万方数据

像结果的影响。

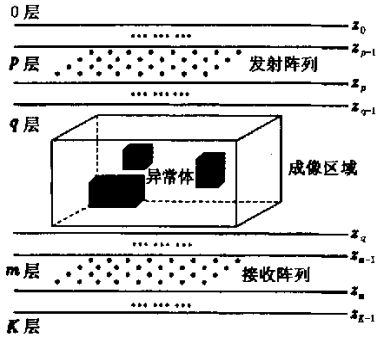


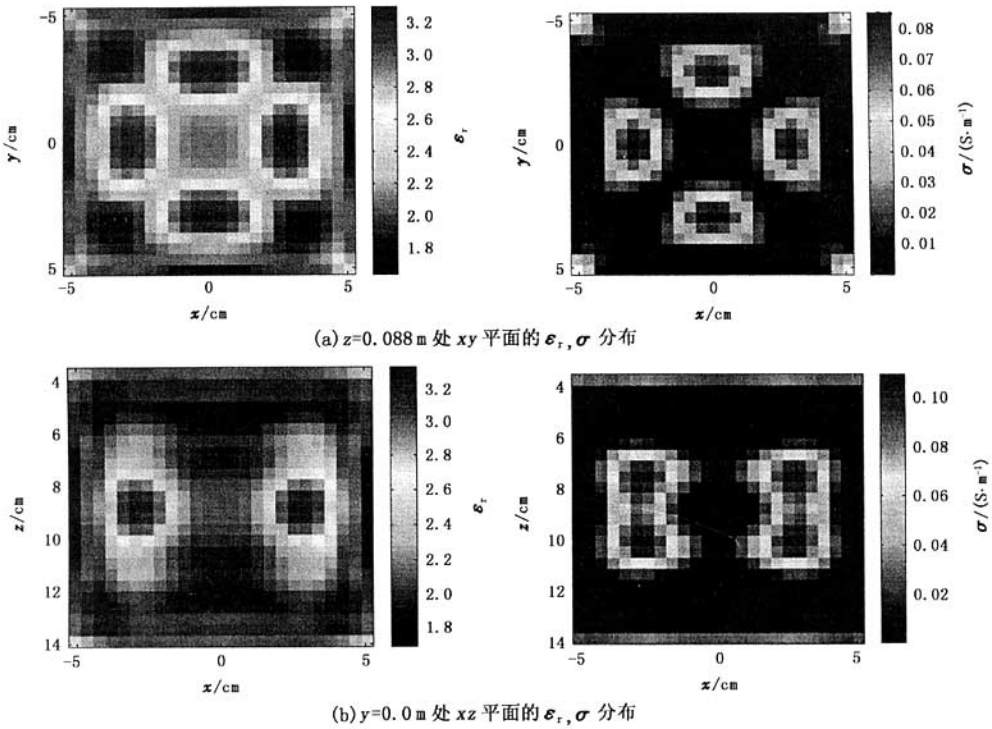
图 1　多层介质中重构 3 维物体简图

3.1　CSI 算法的验证

假设模型 1 为 5 层介质的复杂模型($K = 4$),在中间层有 4 个立方体。背景层的电参数分别为:$\varepsilon_{r0} = 1.0$,$\sigma_0 = 0.0$ S/m;$\varepsilon_{r1} = 3.0$,$\sigma_1 = 0.01$ S/m;$\varepsilon_{r2} = 2.0$,$\sigma_2 = 0.01$ S/m;$\varepsilon_{r3} = 3.0$,$\sigma_3 = 0.01$ S/m;$\varepsilon_{r4} = 1.0$,$\sigma_4 = 0.0$ S/m。背景层层界面位置为 $z_0 = 0.0$ m,$z_1 = 0.02$ m,$z_2 = 0.156$ m,$z_3 = 0.176$ m。中间层内成像区域 D 的中心坐标为(0.0,0.0,0.088)m,其尺寸为 0.106 m × 0.106 m × 0.106 m。发射源为垂直电偶极子源,发射频率为 $f = 2$ GHz。D 域内 4 个立方体的电参数均为 $\varepsilon_r = 4.0$,$\sigma = 0.2$ S/m。沿 x 方向放置的两个物体的尺寸均为 0.017 m × 0.021 m × 0.03 m,它们的中心点坐标分别为(−0.028,0.0,0.088)m 和(0.028,0.0,0.088)m。沿 y 方向放置的两个物体的尺寸均为 0.021 m × 0.017 m × 0.03 m,它们的中心点坐标分别为(0.0,−0.028,0.088)m 和(0.0,0.028,0.088)m。

二维平面发射源阵列在最上层介质内 z_0 上方 0.02 m 处,该阵列共有 8 × 8 = 64 个发射源,它们均匀分布在 x 方向和 y 方向 −0.28 m 至 0.28 m 的范围内。二维平面接收阵列在最底层介质内 z_3 下方 0.02 m 处,其结构与发射源阵列相同。本模型只利用合成散射电场的 z 分量,所以信息量总数为 64 × 64 = 4 096。该模型人为添加了 5% 的随机噪声。成像区域 D 被分解为 25 × 25 × 25 个像素,从而给出含相对介电系数和电导率的 15 625 个复未知量,未知量数目远大于信息量数目。

图 2 为用 CSI 算法得到的 $z = 0.088$ m 处 xy 平面和 $y = 0.0$ m 处 xz 平面上相对介电系数 ε_r 和电导率 σ 的成像结果。



(a) z=0.088 m 处 xy 平面的 ε_r, σ 分布

(b) y=0.0 m 处 xz 平面的 ε_r, σ 分布

图 2　用 CSI 算法得到的模型 1 的重构成像

万方数据

由图 2 可以看出，尽管测量信息中含有噪声且未知量数目远大于信息量数目，4 个立方体的位置和尺寸均被精确重构，尤其是在 x，y 方向。由于本模型的地层结构和测量信息均在每一个方向对称，所以成像结果亦满足这种对称特征。从图 2 还可以看出，由于测量信息是在 xy 平面收集的，测量数据所包含的 x，y 方向的信息量要多于 z 方向的信息量，所以成像结果在 x，y 方向的分辨率要高于 z 方向的分辨率。该实例充分说明了 CSI 成像技术对重构层状介质中的三维物体的可行性。

3.2　物体尺寸对成像结果的影响

模型 2 为一个 3 层介质（$K = 2$）反演模型，3 层介质的电参数分别为：$\varepsilon_{r0} = 16.0$，$\sigma_0 = 0.16$ S/m；$\varepsilon_{r1} = 20.0$，$\sigma_1 = 0.2$ S/m；$\varepsilon_{r2} = 1.0$，$\sigma_2 = 0.0$ S/m。背景介质界面位置为 $z_0 = 0.01$ m，$z_1 = 0.2$ m。成像区域 D 在最上层，其中心坐标为（0.0，0.0，－0.08）m，其尺寸为 0.16 m × 0.16 m × 0.16 m。发射源为垂直电偶极子源，发射频率为 $f = 800$ MHz，电磁波在背景地层的波长约为 2.3 cm。D 域内有 4 个立方体，其中心位置坐标分别为（0.04，0.04，－0.08）m，（0.04，－0.04，－0.08）m，（－0.04，0.04，－0.08）m，（－0.04，－0.04，－0.08）m。第 1 个和第 4 个立方体的电参数相同，为 $\varepsilon_r = 32.0$，$\sigma = 0.8$ S/m，另外两个立方体的电参数为 $\varepsilon_r = 48.0$，$\sigma = 0.4$ S/m。该模型中具有较高相对介电系数的一对立方体具有较低的电导率。发射源和接收器均匀分布在 D 域除底面外的其余 5 个面上。每个面上有 9 个发射源，它们同时也是接收器，所以收集到的数据点的总数为 45 × 45 = 2025。成像区域 D 被分解为 32 × 32 × 32 个像素，从而给出 32 768 个复未知量，未知量数目超过数据点总数的 16 倍。

首先考察所有 4 个立方体的尺寸均为 2 cm 的情况，该尺寸接近于 1 个波长。图 3 为三维成像结果的截面图。由图 3 可以看出，4 个立方体的位置已精确重构且对相对介电系数和电导率的成像模式与原模型完全吻合。对于该实例，经 CSI 迭代反演后最大相对介电系数已达到 27，最大电导率已达到 0.37 S/m。尽管该模型的相对信息量要远小于第 1 个模型，但由于在该模型中发射源和接收器的分布更为合理，接收到的相对独立的信息量更为丰富，所以成像分辨率更高。

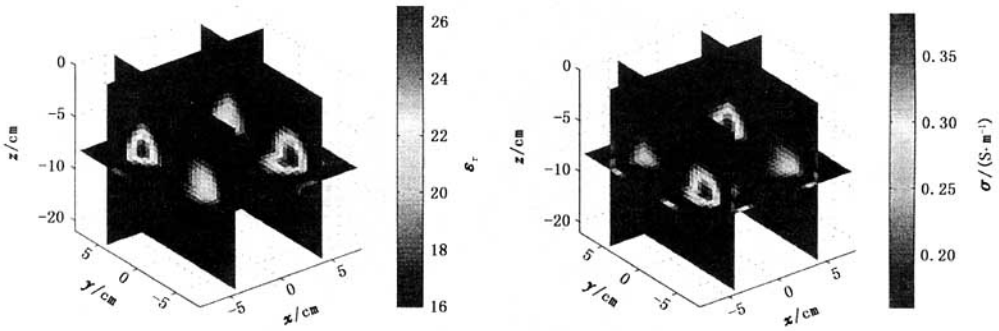


图 3　4 个物体的尺寸均为 2 cm 时模型 2 的重构成像

在第二种情况中，第 1 个和第 2 个立方体的尺寸为 2 cm，而第 3 个和第 4 个立方体的尺寸为 1 cm。该例中由于小立方体的体积只有大立方体的 1/8，所以由小立方体产生的散射场相对很弱，其影响已在图 4 给出的三维成像结果的截面图中体现了出来。从图 4 可以看出，由于第 3 和第 4 个立方体重构后的相对介电系数和电导率值远小于第 1 和第 2 个立方体，在图中很难显示出。对于该例，两个大立方体的相对介电系数和电导率的成像模式亦与原模型完全吻合。经 CSI 迭代反演后最大相对介电系数已达到 26，最大电导率已达到 0.36 S/m。

在第三种情况中，所有 4 个立方体的尺寸只有 0.5 cm。图 5 为三维成像结果的截面图。对该情况，成像结果仍保持了与原模型相同的模式，但由于由这 4 个异常块产生的散射场太弱，重构后的相对介电系数和电导率远小于实际值，接近于背景介质。经 CSI 迭代反演后最大相对介电系数只能达到 16.15，最大电导率只能达到 0.1627 S/m。

在第四种情况中，所有 4 个立方体的尺寸均为 1 cm。图 6 为三维成像结果的截面图。与前几种情况类似，成像结果仍保持了与原模型相同的模式，且成像结果要优于第三种情况，但比第一种情况差。经 CSI 迭代反演后最大相对介电系数达到 17.3，最大电导率达到 0.187 S/m。

对比这几种不同的情况发现，尽管不同情况下模型中异常体的尺寸发生变化而电参数保持不变，

万方数据

但在成像结果中造成的明显不同是相对介电系数和电导率值,而不是异常体的尺寸。

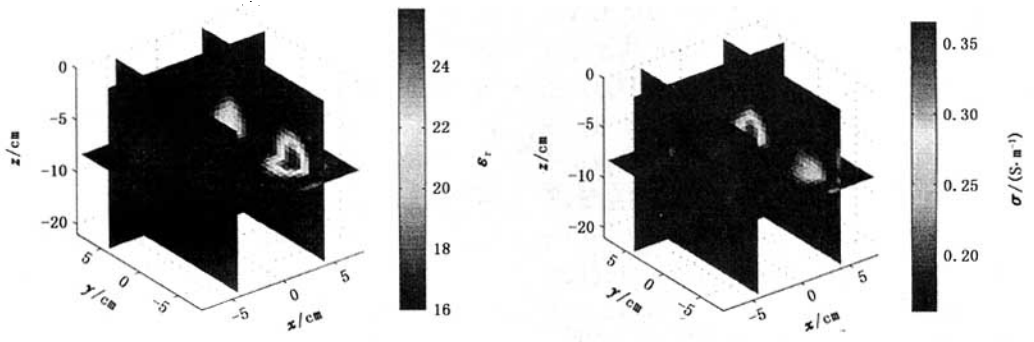


图 4 2 个物体的尺寸为 2 cm,另 2 个物体的尺寸为 1 cm 时模型 2 的重构成像

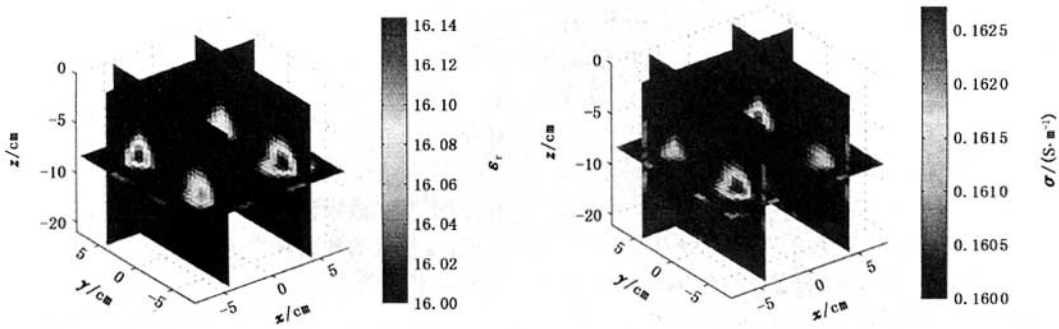


图 5 4 个物体的尺寸均为 0.5 cm 时模型 2 的重构成像

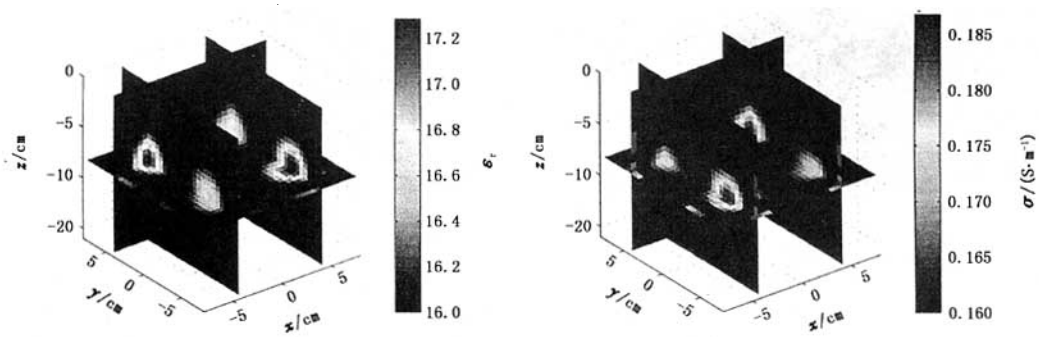


图 6 4 个物体的尺寸均为 1 cm 时模型 2 的重构成像

4 结束语

开发了一种三维对比源反演(CSI)算法对层状介质中的三维物体进行重构。CSI 算法将反演问题转化为求解成本泛函的极小值问题,从而形成重构对比源和对比度的迭代序列。该算法无须正演计算,亦无须人为地选择正则化参数,反演过程更稳定。CSI 的每一次迭代过程均采用快速 Fourier 变换技术计算并矢 Green 函数算子及其共轭算子,确保了该算法在三维层状介质情况下的高效率。一些复杂模型的反演结果显示了当发射源和接收器在任意位置时该项技术对重构多层介质中任意三维异常体分布的有效性和准确性。从反演结果中可以看出,尽管信息量和探测器分布有限,成像结果仍令人满意。

参考文献:

[1] MILLARD X, LIU Q H. Simulation of near-surface detection of objects in layered media by the BCGS-FFT method [J]. IEEE Trans Geosci Remote Sensing, 2004, 42(2):327-334.

[2] MILLARD X, LIU Q H. A fast volume integral equation solver for electromagnetic scattering from large inhomoge-

万方数据

neous objects in planarly layered media [J]. IEEE Trans Antennas Propagat, 2003,51(9):2393-2401.

[3] XU X M, LIU Q H. The BCGS-FFT method for electromagnetic scattering from inhomogeneous objects in a planarly layered medium [J]. IEEE Antennas and Wireless Propagat Lett, 2002,1(1):77-80.

[4] WANG Y M, CHEW W C. An iterative solution of the two-dimensional electromagnetic inverse scattering problem [J]. Int J Imaging Syst Tech, 1989,1(1):100-108.

[5] CHEW W C, WANG Y M. Reconstruction of two-dimensional permittivity distribution using the distorted Born iterative method [J]. IEEE Trans Med Imag, 1990,9(3):218-225.

[6] LI F H, LIU Q H, SONG L P. Three-dimensional reconstruction of objects buried in layered media using Born and distorted Born iterative methods [J]. IEEE Geosci Remote Sensing Letters, 2004,1(2):107-111.

[7] van den BERG P M, KLEINMAN R E. A contrast source inversion method [J]. Inverse Problems,1997,13:1607-1620.

[8] van den BERG P M,van BROEKHOVEN A L,ABUBAKAR A. Extended contrast source inversion [J]. Inverse Problems, 1999,15:1325-1344.

[9] ZWAMBORN A P M, van den BERG P M. The three-dimensional weak form of the conjugate gradient FFT method for solving scattering problems [J]. IEEE Trans Microwave Theory and Tech, 1992,40(9):1757-1766.

[10] MICHALSKI K A, ZHENG D. Electromagnetic scattering and radiation by surface of arbitrary shape in layered media, part I: theory [J]. IEEE Trans Antennas Propagat, 1990,38(2):335-344.

[11] ZHANG Z Q, LIU Q H. Three-dimensional nonlinear image reconstruction for microwave biomedical imaging [J]. IEEE Trans Biomed Eng, 2004,51(3):544-548.

[12] SONG L P, LIU Q H, LI F H, et al. Reconstruction of three-dimensional objects in layered media: numerical experiments [J]. IEEE Trans Antennas Propagat, 2005,53(6):1556-1561.

(编辑　修荣荣)

(上接第 29 页)

[14] 印兴耀,杨凤丽,吴国忱. 神经网络在 CB 油田储层预测和储层厚度计算中的应用[J]. 石油大学学报:自然科学版,1998,22(2):17-20.
YIN Xing-yao, YANG Feng-li, WU Guo-chen. Application of neural network to predicting reservoir and calculating thickness in CB Oilfield[J]. Journal of the University of Petroleum,China(Edition of Natural Science), 1998,22(2):17-20.

[15] 印兴耀,吴国忱,张洪宙. 神经网络在储层横向预测中的应用[J]. 石油大学学报:自然科学版, 1994,18(5):20-26.
YIN Xing-yao, WU Guo-chen, ZHANG Hong-zhou. The application of neural networks in the reservoir prediction[J]. Journal of the University of Petroleum, China(Edition of Natural Science),1994,18(5):20-26.

[16] 印兴耀,周静毅. 地震属性优化方法综述[J]. 石油地球物理勘探, 2005,40(4):482-489.
YIN Xing-yao, ZHOU Jing-yi. Summary of optimum methods of seismic attributes[J]. Oil Geophysical Prospecting, 2005,40(4):482-489.

[17] 张广智,刘洪,印兴耀. 井旁道地震子波精细提取方法[J]. 石油地球物理勘探, 2005,40(2):158-162.
ZHANG Guang-zhi, LIU Hong, YIN Xing-yao. Method for fine picking up seismic wavelet at uphole trace[J]. Oil Geophysical Prospecting, 2005,40(2):158-162.

[18] 王保丽,印兴耀,张繁昌. 弹性阻抗反演及应用研究[J]. 地球物理学进展,2005,20(1):89-92.
WANG Bao-li, YIN Xing-yao, ZHANG Fan-chang. Elastic impedance inversion and its application[J]. Progress in Geophysics, 2005,20(1):89-92.

(编辑　刘艳荣)

万方数据