

文章编号:1673-5005(2006)01-0150-04

离散复镜像法求取层状介质的格林函数

邵长金, 李相方

(中国石油大学 石油天然气工程学院, 北京 102249)

摘要:对分层地层进行井间电磁成像时,需要求取分层介质中的格林函数。利用频率域中电磁场的边界条件,求出频率域分层介质的格林函数,再利用傅里叶逆变换,将格林函数变换到空间域,得到以 Sommerfeld 积分形式表达的解。为了避免积分中的奇异性,利用离散复镜像法将积分核用复镜像的指数求和式表示,引入广义函数束方法,可以在不提取积分核中表面波项的条件下,采用数值方法提取准静态项,给出复镜像点的数目、位置和强度,使得该方法在多层介质情况下对格林函数的计算更为有效。对一个7层介质中的垂直磁偶极子的矢量势和标量势进行了计算,离散复镜像法与 Sommerfeld 精确积分的结果吻合较好,说明离散复镜像法是比较准确的。

关键词:离散复镜像方法;层状介质;格林函数;广义函数束方法;Sommerfeld 积分

中图分类号:O 441.4 **文献标识码:**A

Calculation of spatial-domain Green's functions for multi-layered media by discrete complex image method

SHAO Chang-jin, LI Xiang-fang

(Faculty of Petroleum Engineering in China University of Petroleum, Beijing 102249, China)

Abstract: The Green's functions for multi-layered media are needed when crosshole electromagnetic imaging is applied to stratified media. According to the boundary conditions, the spectral domain Green's functions for multi-layered media were formed. Then the spatial domain Green's functions can be obtained by the inverse Fourier transformation, which are represented by the Sommerfeld integrals. In order to avoid the singularity in the integration, the integrand was expressed to be sum of complex exponential terms by using discrete complex image method(DCIM). With generalized pencil of function (GPOF) method introduced, the number, location and intensity of images were obtained without extracting the quasi-static and surface wave terms in the integrand, which makes DCIM more efficient for multi-layered media. As a numerical example, the vector and scalar potential for a vertical magnetic dipole immersed in seven layers media were calculated, and the results got by DCIM and precise integration show that the DCIM is very accurate.

Key words: discrete complex image method; layered media; Green's function; generalized pencil of function method; Sommerfeld integral

目前国内外对井间电磁成像的研究均假设地层电性参数是各向同性的^[1],此时的 Green 函数非常简单。对水平成层地层,魏宝君^[2]利用矩阵求逆方法给出了 Green 函数的求解过程,但在实际计算中,由于存在计算误差,即使是奇异矩阵也可能得到它的逆矩阵,因此,矩阵求逆方法获得的 Green 函数有可能是虚假的。Li 等^[3]提出矩阵束(matrix pencil)的方法,其缺点是要在 Green 函数进行 Hankel 变换

前先提取极点。离散复镜像方法(DCIM)在处理一层或两层介质的 Green 函数时非常有效^[4],在处理多层介质时,需要提取 Sommerfeld 积分中的准静态项和表面波项^[5,6],但目前尚缺乏提取表面波项的可靠过程。Liu 等^[7]采取两步迭代方法来解决这一问题,笔者则利用广义函数束(GPOF)^[8]的概念对此进行简化,以使 Green 函数的计算具有较好的速度和精度。

收稿日期:2005-09-23

基金项目:中国石油大学(北京)校长基金项目(10505)

作者简介:邵长金(1964-),男(汉族),山东费县人,副教授,博士,从事井间电磁成像和剩余油分布研究。

1 层状介质格林函数的频域表示

在研究导电介质中的电磁波传播行为时,通常引入复电容率 $\epsilon' = \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$, 进而引入复波数 $k' = \omega\sqrt{\mu\epsilon'}$ 。其中, ϵ, σ, μ 分别为导电介质的电容率、电导率和磁导率, 波动以 $\exp(-i\omega t)$ 的形式随时间变化。文中的波数均指复波数。

格林函数是点源(偶极子)的波动方程的解,对无限大均匀介质的标量问题,有

$$(\nabla^2 + k_0^2)g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

它可在频域表示^[9]为

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - k_0^2} \times dk_x dk_y dk_z.$$

令

$$\mathbf{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} = \mathbf{k}_\perp + k_z \hat{z},$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\perp + z\hat{z}, \mathbf{r}' = \mathbf{r}'_\perp + z'\hat{z},$$

则格林函数积分式有极点 $k_{0z}^2 = k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 = k_0^2 - k_\perp^2$ 。利用留数定理,当 $z > z'$ 时,对 dk_z 进行积分,可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \frac{1}{k_z^2 - k_{0z}^2} \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] = 2i\pi \text{Res} \times \left\{ \frac{\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{k_z^2 - k_{0z}^2} \right\} = 2i\pi \lim_{k_z \rightarrow k_{0z}} \left\{ \frac{k_z - k_{0z}}{k_z^2 - k_{0z}^2} \times \exp[i\mathbf{k}_\perp(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)] \exp[ik_z(z - z')] \right\} = \frac{i\pi}{k_{0z}} \exp[i\mathbf{k}_\perp(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)] \exp[ik_z(z - z')].$$

从而有

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_\perp \frac{1}{2k_{0z}} \exp[i\mathbf{k}_\perp(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)] \exp[ik_{0z}(z - z')], \quad z > z'.$$

对 $z < z'$, 同理可求。合并后,有

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_\perp \frac{1}{2k_{0z}} \exp[i\mathbf{k}_\perp(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)] \exp(ik_{0z}|z - z'|).$$

注意到上面的公式是对 $\exp(i\omega t)$ 形式求得的,对 $\exp(-i\omega t)$ 形式的波动,有

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_\perp \frac{-1}{2k_{0z}} \exp[i\mathbf{k}_\perp(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)] \exp(ik_{0z}|z - z'|) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_\perp \frac{1}{2ik_{0z}} \times$$

$$\exp[i\mathbf{k}_\perp(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)] \exp(ik_{0z}|z - z'|).$$

由傅里叶变换知,

$$\tilde{g}(k_x, k_y) = \frac{1}{2ik_{0z}} \exp(ik_{0z}|z - z'|)$$

就是无限大均匀介质的频域的表达形式。

对分层介质情况,如果源为垂直磁偶极子(VMD),因为 $E_z = 0$,所以只产生 TE 场。设源在第 i 层介质,根据上述结果,可将频域中第 i 层的格林函数表示为

$$\tilde{G}_{zz}^F = \frac{\epsilon_i}{j2k_{zi}} [\exp(-jk_{zi}|z|) + A_{ij}^{\text{ref}} \exp(-jk_{zi}z) + B_{ij}^{\text{ref}} \exp(jk_{zi}z)],$$

$$\tilde{G}_z^{\text{tm}} = \frac{1}{j2k_{zi}t_i} [\exp(-jk_{zi}|z|) + C_{ij}^{\text{ref}} \exp(-jk_{zi}z) + D_{ij}^{\text{ref}} \exp(jk_{zi}z)].$$

其中

$$A_{ij}^{\text{ref}} = \exp(-jk_{zi}h) \tilde{R}_{i,i-1}^{\text{TE}} \{ \exp(-jk_{zi}h) + \tilde{R}_{i,i+1}^{\text{TE}} \exp[-jk_{zi}(2d_i - h)] \} M_i^{\text{TE}},$$

$$B_{ij}^{\text{ref}} = \exp(-jk_{zi}(d_i - h)) \tilde{R}_{i,i+1}^{\text{TE}} [\exp(-jk_{zi}(d_i - h)) + \tilde{R}_{i,i-1}^{\text{TE}} \exp(-jk_{zi}(d_i + h))] M_i^{\text{TE}},$$

$$C_{ij}^{\text{ref}} = \exp(-jk_{zi}h) \tilde{R}_{i,i-1}^{\text{TE}} [-\exp(-jk_{zi}h) + \tilde{R}_{i,i+1}^{\text{TE}} \exp(-jk_{zi}(2d_i - h))] M_i^{\text{TE}},$$

$$D_{ij}^{\text{ref}} = \exp(-jk_{zi}(d_i - h)) \tilde{R}_{i,i+1}^{\text{TE}} [-\exp(-jk_{zi}(d_i - h)) + \tilde{R}_{i,i-1}^{\text{TE}} \exp(-jk_{zi}(d_i + h))] M_i^{\text{TE}},$$

$$M_i^{\text{TE}} = [1 - \tilde{R}_{i,i+1}^{\text{TE}} \tilde{R}_{i,i-1}^{\text{TE}} \exp(-jk_{zi}2d_i)]^{-1},$$

$$\tilde{R}_{i+1,i}^{\text{TE}} = \frac{R_{i+1,i}^{\text{TE}} + \tilde{R}_{i,i-1}^{\text{TE}} \exp(-jk_{zi}2d_i)}{1 - R_{i,i+1}^{\text{TE}} \tilde{R}_{i,i-1}^{\text{TE}} \exp(-jk_{zi}2d_i)},$$

$$R_{i,i+1}^{\text{TE}} = \frac{\mu_{i+1}k_{i,z} - \mu_i k_{i+1,z}}{\mu_{i+1}k_{i,z} + \mu_i k_{i+1,z}}.$$

式中, \tilde{G}_{ij}^F 表示频域中 j 方向的电流源在 i 方向产生的电矢量势; \tilde{G}_i^{tm} 代表频域 i 方向磁流源产生的磁标量势; i, j 都是 z 轴方向; $A_{ij}^{\text{ref}}, B_{ij}^{\text{ref}}, C_{ij}^{\text{ref}}, D_{ij}^{\text{ref}}$ 为反射系数。对其他层中的波,其上行波和下行波振幅可按递推公式计算。

求出场的垂直分量 \tilde{G}_z 后,可根据频域中横向分量与垂直分量的关系^[10] 求取横向分量 \tilde{G}_s , 表达式为

$$\tilde{G}_{E,s}(k_\rho, \mathbf{r}) = \frac{[\nabla_s \frac{\partial \tilde{G}_{E,z}}{\partial z} - i\omega\mu\hat{z} \times \nabla_s \tilde{G}_{H,z}]}{\omega^2 \mu\epsilon - k_z^2},$$

$$\tilde{G}_{H,s}(k_\rho, \mathbf{r}) = \frac{[\nabla_s \frac{\partial \tilde{G}_{H,z}}{\partial z} + i\omega\epsilon\hat{z} \times \nabla_s \tilde{G}_{E,z}]}{\omega^2 \mu\epsilon - k_z^2}.$$

2 层状介质格林函数的空域表示

对层状介质,空间域与频域的格林函数通过

Sommerfeld 积分形式的傅里叶变换联系^[10],有

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k_\rho) H_0^{(1)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho. \quad (1)$$

这个积分方程一般不能用解析方法求取,特别是当场、源处于同一层介质时,由于此时

$$H_0^{(1)}(k_\rho \rho) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho \rho}} \exp(ik_\rho \rho - i\frac{\pi}{2}), \rho \rightarrow \infty$$

随 k_ρ 快速振荡,谱域 Green 函数表达式中的 $\exp(ik_z |z|)$ 也随着 $z \rightarrow \infty$ 而快速振荡,整个被积函数是快速振荡的慢衰减函数,导致积分值在真值附近振荡,因此采用一般的数值积分方法很难求得其精确解。但当被积函数 \tilde{G} 可用复指数形式作近似时,就可以解析求解。

离散复镜像方法^[4] 将空域格林函数用复镜像的指数求和式表示,每一指数项具有形如 $\exp(jk_{zi}(\pm z \pm z'))$ 的因子,而且对 z 和 z' 的依赖关系仅出现在指数中。如果 $2jk_{zi}f(k_\rho)$ 可用复镜像展开为

$$2jk_{zi}f(k_\rho) = \sum_m a_m \exp(jk_{zi}b_m),$$

则 $f(k_\rho)\exp(jk_{zi}(z + z'))$ 可通过 Sommerfeld 恒等式变换到空域中,即

$$\int_{SIP} f(k_\rho) \exp(jk_{zi}(z + z')) H_0^{(1)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho = \sum_m a_m \int_{SIP} \frac{1}{2jk_{zi}} \exp(jk_{zi}(b_m + z + z')) H_0^{(1)}(k_\rho \rho) \times k_\rho dk_\rho = \sum_m a_m \frac{\exp(-jk_i r_m)}{r_m}.$$

其中

$$r_m = \sqrt{\rho^2 + (b_m + z + z')^2}.$$

这一方法对源点和场点在同一层的情况非常适用,当源点和场点不在同一层时,因子 $\exp(jk_{zi}(\pm z \pm z'))$ 变为 $\exp(\pm jk_{zi}z \pm jk_{zj}z')$,并且 $k_{zi} \neq k_{zj}$,在此情况下,可以将 $2jk_{zi}f(k_\rho)\exp(\pm jk_{zj}z')$ 展开成 $\sum_m a_m \exp(jk_{zi}b_m)$,或者将 $2jk_{zj}f(k_\rho)\exp(\pm jk_{zi}z)$ 展开成 $\sum_m a_m \exp(jk_{zj}b_m)$ 。前一方法, a_m, b_m 与 z' 有关,但和 z 无关;后一方法, a_m, b_m 与 z 有关,但和 z' 无关。但两种方法都无法使 a_m, b_m 与 z 和 z' 同时无关。

为说明问题,以位于上半空间 d 处的垂直磁偶极子产生的 TE 场为例,讨论式(1)中被积函数的意义。此时,式(1)中被积函数为

$$G_{1z} = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_\rho \frac{k_\rho^3}{k_{1z}} H_0^{(1)}(k_\rho \rho) [\exp(ik_{1z} |z|) +$$

$$R_{12}^{TE} \exp(ik_{1z}z + 2ik_{1z}d)].$$

第一部分为直达波,当频率较低时,为准静态项,第二部分为反射波 G_{1z}^R 。由于被积函数中的 $k_{1z} = (k_1^2 - k_\rho^2)^{1/2}$ 有两个支点,可用割线法将原来的 Sommerfeld 积分路径加以改造,经过运算,有

$$G_{1z}^R = \frac{k_1^2 \rho^2}{r_1^2} R_{12}^{TE} \left(\frac{k_1 \rho}{r_1} \right) \frac{\exp(ik_1 r_1)}{r_1} + \frac{\exp(i\frac{\pi}{4})}{\sqrt{\rho}} \exp[ik_2 \rho - \sqrt{k_2^2 - k_1^2}(z + 2d)] \times \left[\frac{i}{\rho + \frac{ik_2}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}}(z + 2d)} \right]^{3/2} \frac{ik_2^3}{k_1^2 - k_2^2}. \quad (2)$$

其中

$$r_1 = [\rho^2 + (z + 2d)^2]^{1/2}.$$

式(2)第一项可解释为源的像点函数,第二项由于 $\frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{\rho}} \exp[ik_2 \rho - \sqrt{k_2^2 - k_1^2}(z + 2d)]$ 在 ρ 方向

以介质 2 的速度(k_2)传播,且以 $\sqrt{k_2^2 - k_1^2}(z + 2d)$ 方式在介质 2 中快速衰减,形成表面波。

DCIM 方法是将式(1)积分核中收敛很慢的准静态项和表面波项提取出来,再对剩余的积分核用复指数的和式表示,从而使积分快速收敛。但由于准静态项和表面波项的提取过程非常复杂,对多层介质而言,相当困难。利用广义函数束(GPOF)方法^[8] 则可不提取表面波项,采用数值方法提取准静态项,使得 DCIM 在多层介质情况下可以方便应用。为此,将频域格林函数重写为

$$\tilde{G} = \frac{F - F_0}{2jk_{zi}} + \frac{F_0}{2jk_{zi}}.$$

其中, F_0 为准静态项,通过 Sommerfeld 恒等式变换,第二项对应的空域格林函数为 $\frac{\exp(jk_{zi}\rho)}{4\pi\rho} F_0$ 。由于准静态项的提取过程比较复杂,对 F_0 的具体表达式本文中不予讨论。上式第一项用 GPOF 方法进行复指数近似:在复 k_{zi} 空间($k_{zi} = \text{Re}[k_{zi}] + j\text{Im}[k_{zi}]$) 上,选择 $k_{zi} = k_i[(1 - t/T_0) - jt]$ 作为积分路径,在 $[0, T_0]$ 区间对 $F - F_0$ 均匀采样,有

$$F - F_0 = \sum_{m=1}^N a_m \exp(-k_{zi}b_m),$$

其中, N 为复镜像数目。最后,应用 Sommerfeld 恒等式变换,可得到空间域格林函数的解为

$$G = \frac{\exp(jk_{zi}\rho)}{4\pi\rho} F_0 + \sum_{m=1}^N a_m \frac{\exp(-jk_i r_m)}{4\pi r_m}.$$

其中, $r_m = \sqrt{\rho^2 - b_m^2}$ 代表复镜像的位置。

3 计算实例

考虑一个上下均为无限大半空间的 7 层介质,由上至下中间 5 层的厚度分别为 2,4,2,3,3 m,电导率分别为 0.05,0.4,1.0,0.8,0.1 S/m,相对介电常数分别为 2,3,10,6,4,各层磁导率相同,取值为 $\mu_i = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$ 。

设源位于厚度为 4 m 的层中,距该层下边界 1 m,场点位于同一层,距该层下边界 0.5 m。由于电磁成像应用的是低频电磁波,取电磁波的频率为 1 000 Hz。

用 Sommerfeld 积分进行精确计算,用 DCIM 方法进行近似计算。图 1,2 分别为空间域电矢量势和磁标量势格林函数的计算结果。由图 1 可以看出,二者相差较大,但整体趋势相同。图 2 中二者则完全相同。产生这种现象的原因为:空间域矢量势主要对远场作贡献,振荡性强,计算的误差较大;标量势主要对近场作贡献,因而比较平稳。

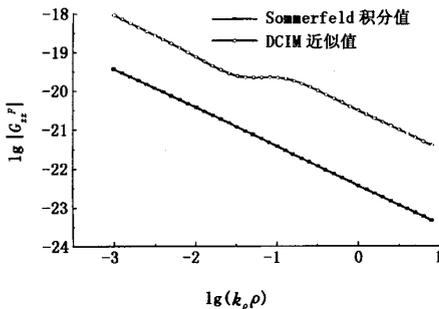


图 1 空间域电矢量势格林函数的计算结果

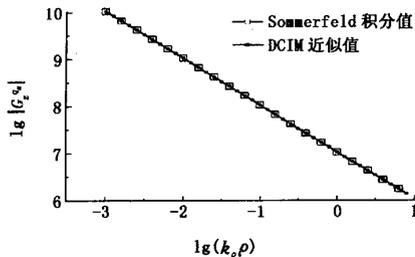


图 2 空间域磁标量势格林函数的计算结果

4 结束语

利用离散复镜像方法将空域格林函数用复镜像的指数求和式表示,方便了 Sommerfeld 积分计算。

广义函数束方法不必提取表面波项,采用数值方法提取准静态项,使得离散复镜像方法在多层介质情况下可以高效应用。与 Sommerfeld 精确积分相比,应用离散复镜像方法对格林函数近似是比较准确的。

参考文献:

- [1] 魏宝君,张庚骥.二维井间电磁场的正反演计算[J].石油大学学报:自然科学版,2002,26(5):28-31.
WEI Bao-jun, ZHANG Geng-ji. Forward modeling and inversion of 2-D cross-hole electromagnetic fields [J]. Journal of the University of Petroleum, China (Edition of Natural Science), 2002, 26(5): 28-31.
- [2] 魏宝君.井间电磁成像方法研究[D].东营:石油大学地球资源与信息学院,2003.
- [3] LI S Q, CHAN C H, TSANG L, et al. Closed-form spatial electric field Green's function of microstrip structures using the fast Hankel transform and the matrix pencil method [J]. Microwave Antennas and Propagation, 2000, 147: 161-166.
- [4] AKSUN M I. A robust approach for the derivation of closed-form Green's function [J]. IEEE Trans Microw Theory Tech, 1995, 44: 651-658.
- [5] DURAL G, AKSUN M I. Closed-form Green's functions for general sources and stratified media [J]. IEEE Trans Microw Theory Tech, 1995, 43: 1545-1551.
- [6] WANG C F, TAN K K, LI L W, et al. Efficient capacitance extraction of MMIC passive components using MoM combined with discrete complex image method [J]. Microwave and Optical Technology Letters, 2002, 32 (3): 216-219.
- [7] LIU Y, LI L W, YEO T S, et al. Calculation of spatial-domain Green's functions for multilayered media using DCIM with automatic handling of surface wave poles [J]. IEEE Proc Microw Antennas Propag, 2004, 151 (3): 236-240.
- [8] HUA Y, SARKAR T K. Generalized pencil-of-function method for extracting poles of an EM system from its transient response [J]. IEEE Trans Antennas Propagat, 1989, 37: 148-158.
- [9] N 纳比吉安.勘查地球物理[M].赵经祥,王艳君,译.北京:地质出版社,1992.
- [10] WENG Cho Chew.非均匀介质中的场与波[M].聂在平,柳清秋,译.北京:电子工业出版社,1992.

(编辑 李志芬)